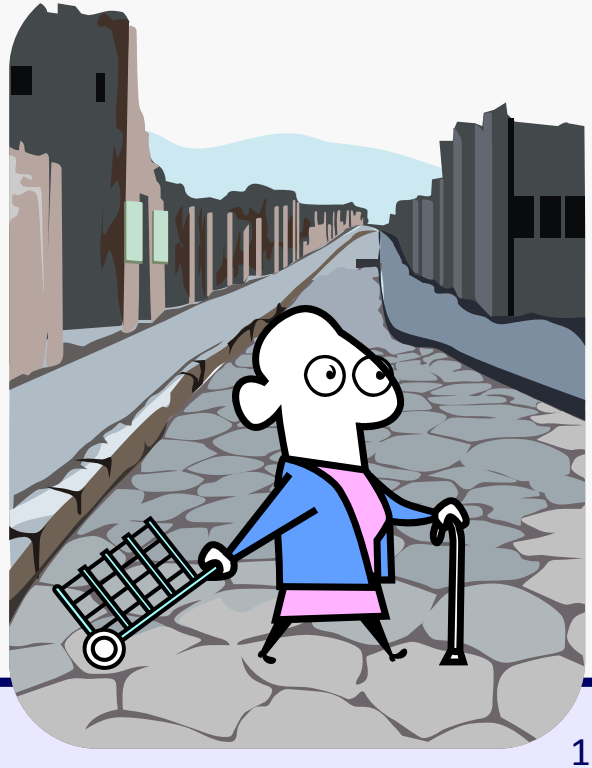
ANALIZA POVEZANOSTI



KORELACIJA

- veza među obilježjima (varijablama)
- obilježja koja “variraju zajedno”

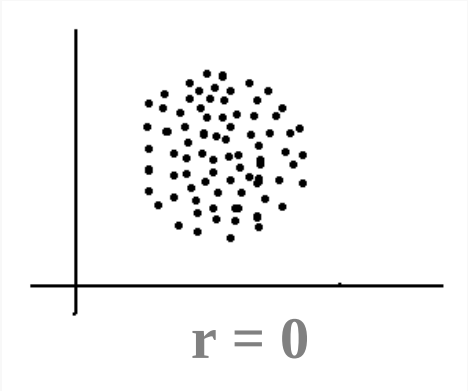
KOEFICIJENT KORELACIJE

- mjera stupnja povezanosti

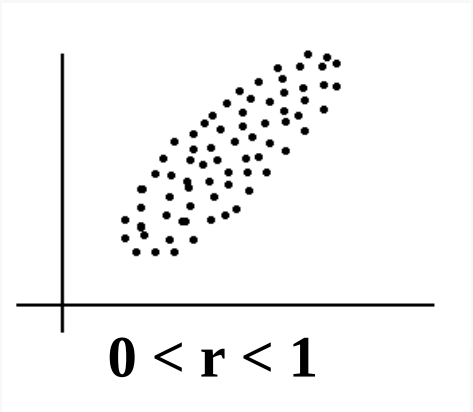
PEARSONOV KOEFICIJENT KORELACIJE r

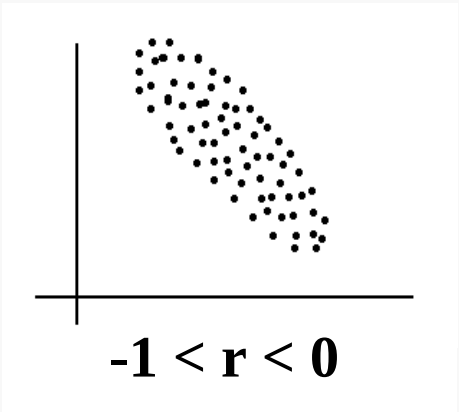
- mjera stupnja ***linearne*** povezanosti dviju kvantitativnih varijabli

$$-1 \leq r \leq 1$$

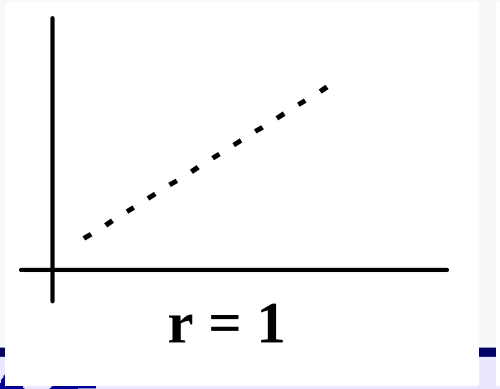


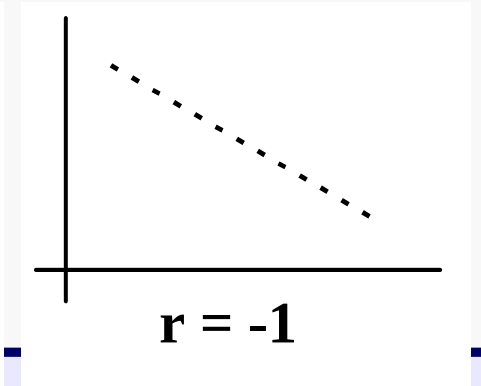
nema povezanosti





stohastička povezanost





funkcionalna povezanost

x, y ....nizovi vrijednosti varijabli čiju povezanost ocjenjujemo

POSTUPAK ZA OCJENU KORELACIJE

a) crtanje korelacionog dijagrama

b) ocjena postojanja povezanosti

c) u slučaju da postoji linearna povezanost, računamo koeficijent korelacije r

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}}$$

skraćeni postupak računanja r:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right]}}$$

ZNAČAJNOST KOEFICIJENTA KORELACIJE

- testiramo je li **r** značajno različit od 0
- test statistika

$$t = r\frac{\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

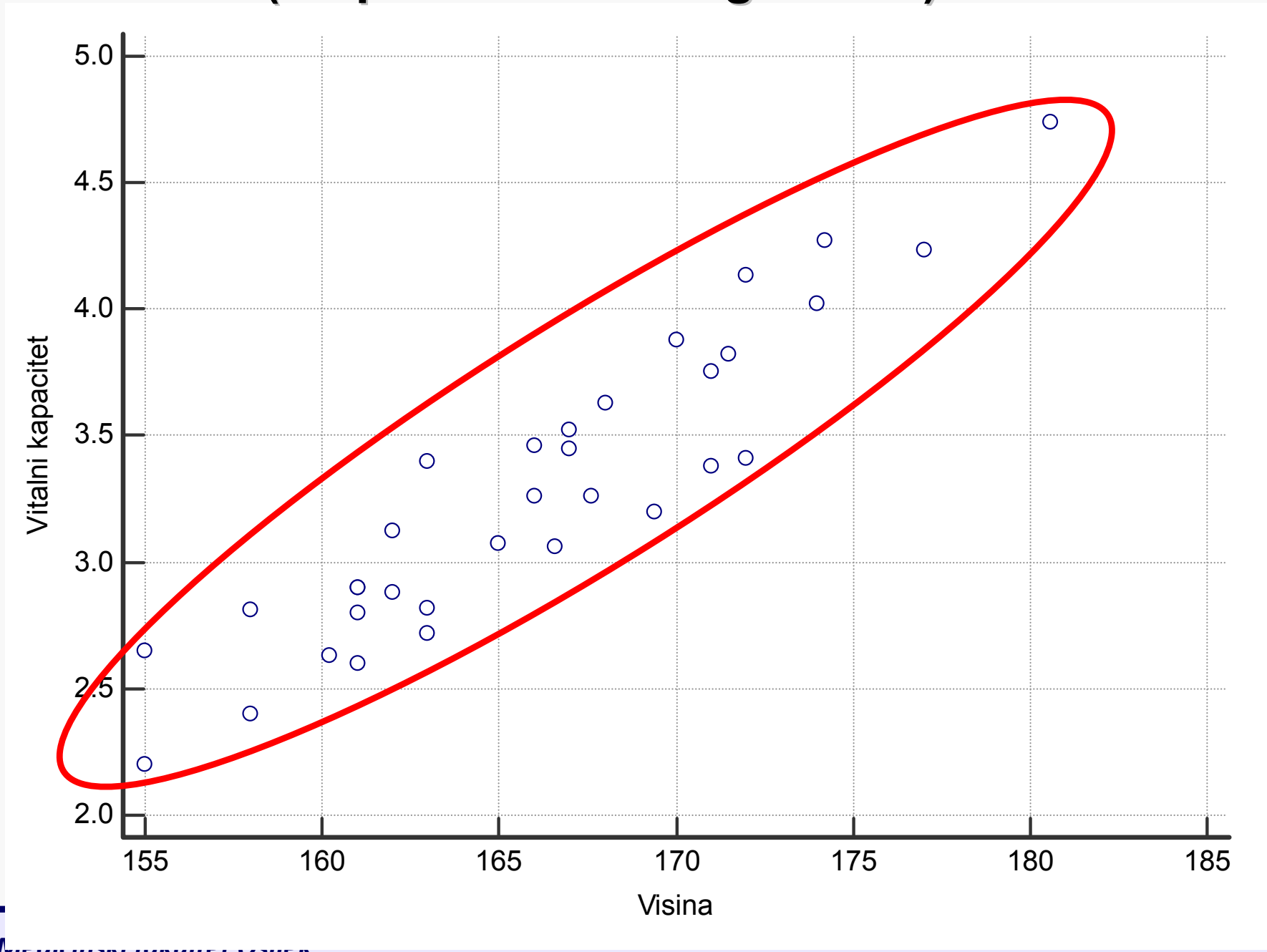
slijedi t razdiobu uz df = N - 2

Izmjerena je visina u centimetrima i vitalni kapacitet pluća (VC) u litrama 33 studentice prve godine. Dobiveni su sljedeći rezultati:

Rbr.	Visina	VC	Rbr.	Visina	VC	Rbr.	Visina	VC
1.	180.6	4.74	12.	155.0	2.20	23.	174.2	4.27
2.	168.0	3.63	13.	171.0	3.38	24.	167.0	3.45
3.	163.0	3.40	14.	171.5	3.82	25.	162.0	2.88
4.	171.0	3.75	15.	167.6	3.26	26.	172.0	4.13
5.	177.0	4.23	16.	160.2	2.63	27.	161.0	2.90
6.	169.4	3.20	17.	166.6	3.06	28.	155.0	2.65
7.	161.0	2.90	18.	167.0	3.52	29.	162.0	3.12
8.	170.0	3.88	19.	163.0	2.82	30.	174.0	4.02
9.	158.0	2.40	20.	172.0	3.41	31.	161.0	2.80
10.	161.0	2.60	21.	158.0	2.81	32.	166.0	3.46
11.	163.0	2.72	22.	165.0	3.07	33.	166.0	3.26

Ocijenite postoji li povezanost visine i vitalnog kapaciteta pluća

Crtanje korelacionog dijagrama
(raspršni/“scatter” grafikon)



Izračun koeficijenta korelacije

Correlation

Variable Y	VC Vitalni kapacitet
Variable X	Visina

Sample size	33
Correlation coefficient r	0.9303
Significance level	P<0.0001
95% Confidence interval for r	0.8624 to 0.9653

Scatter diagram

Interpretacija koeficijenta korelacije

statistička značajnost

- ocjenjuje je li **r** značajno različit od 0
- ovisi o veličini uzorka - za velike uzorke, mali r će biti značajan

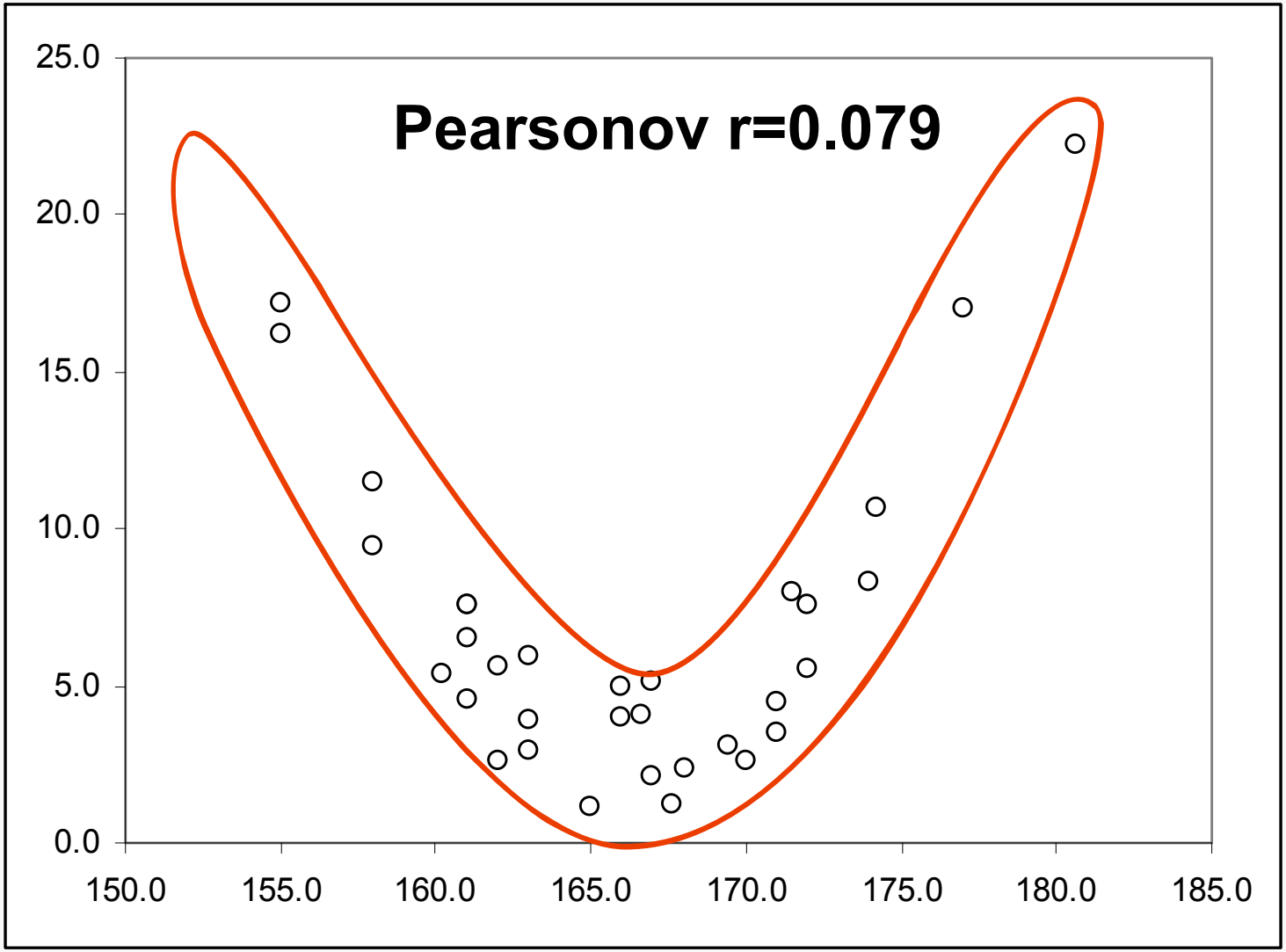
praktična značajnost

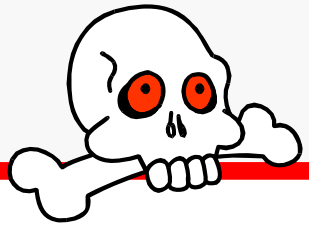
- ocjenjuje se pomoću ***koeficijenta determinacije*** r^2
- koliki udio varijabilnosti je "zajednički"

Interpretacija koeficijenta korelacije

N	Najmanji značajni r (p<0.05)	r^2
10	0.632	0.399
20	0.444	0.197
30	0.361	0.130
40	0.312	0.097
50	0.279	0.078
100	0.197	0.039
200	0.139	0.019
300	0.113	0.013
500	0.088	0.008

VAŽNO:
Pearsonov koeficijent korelacije daje stupanj LINEARNE povezanosti dviju varijabli!

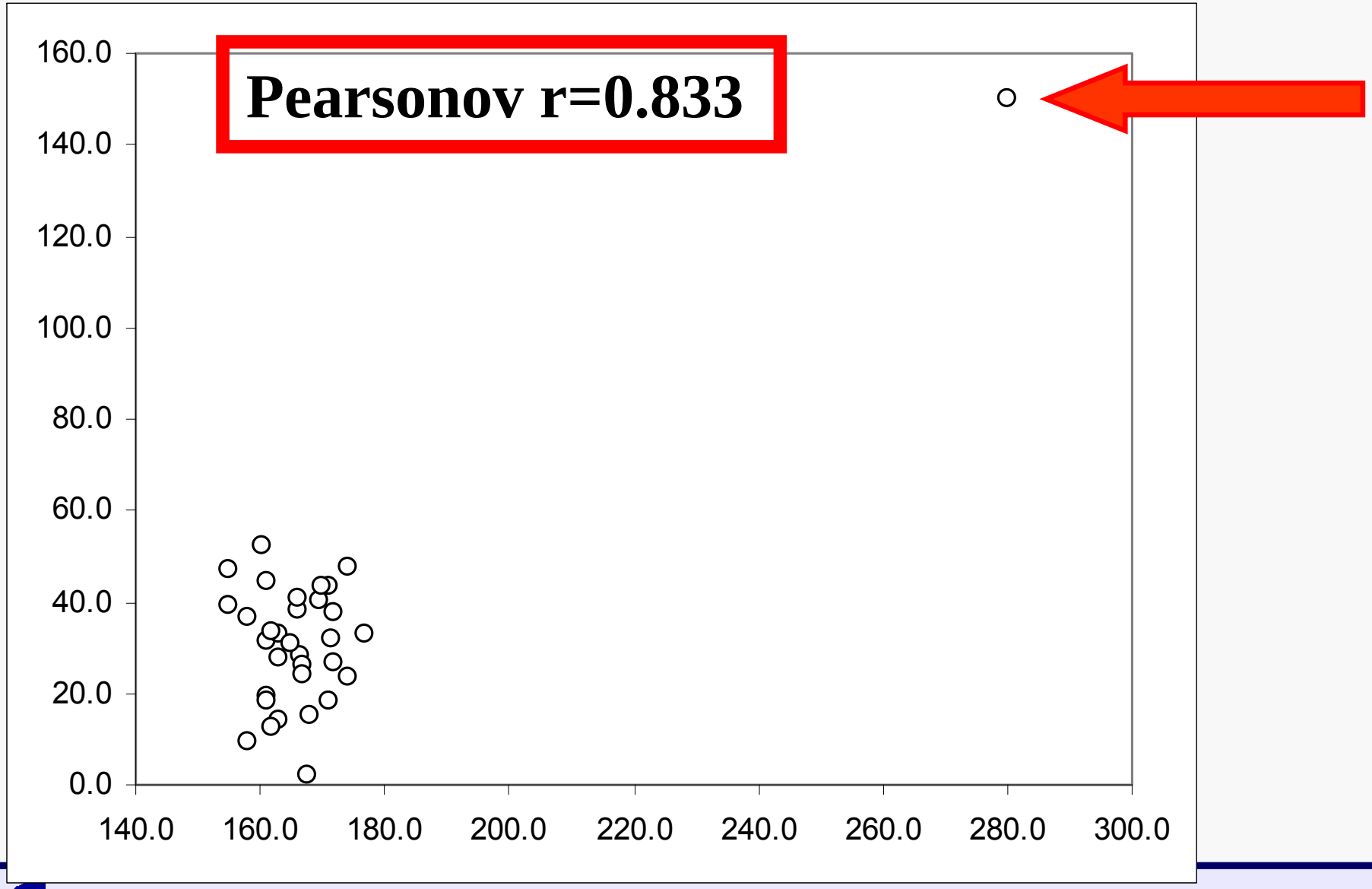


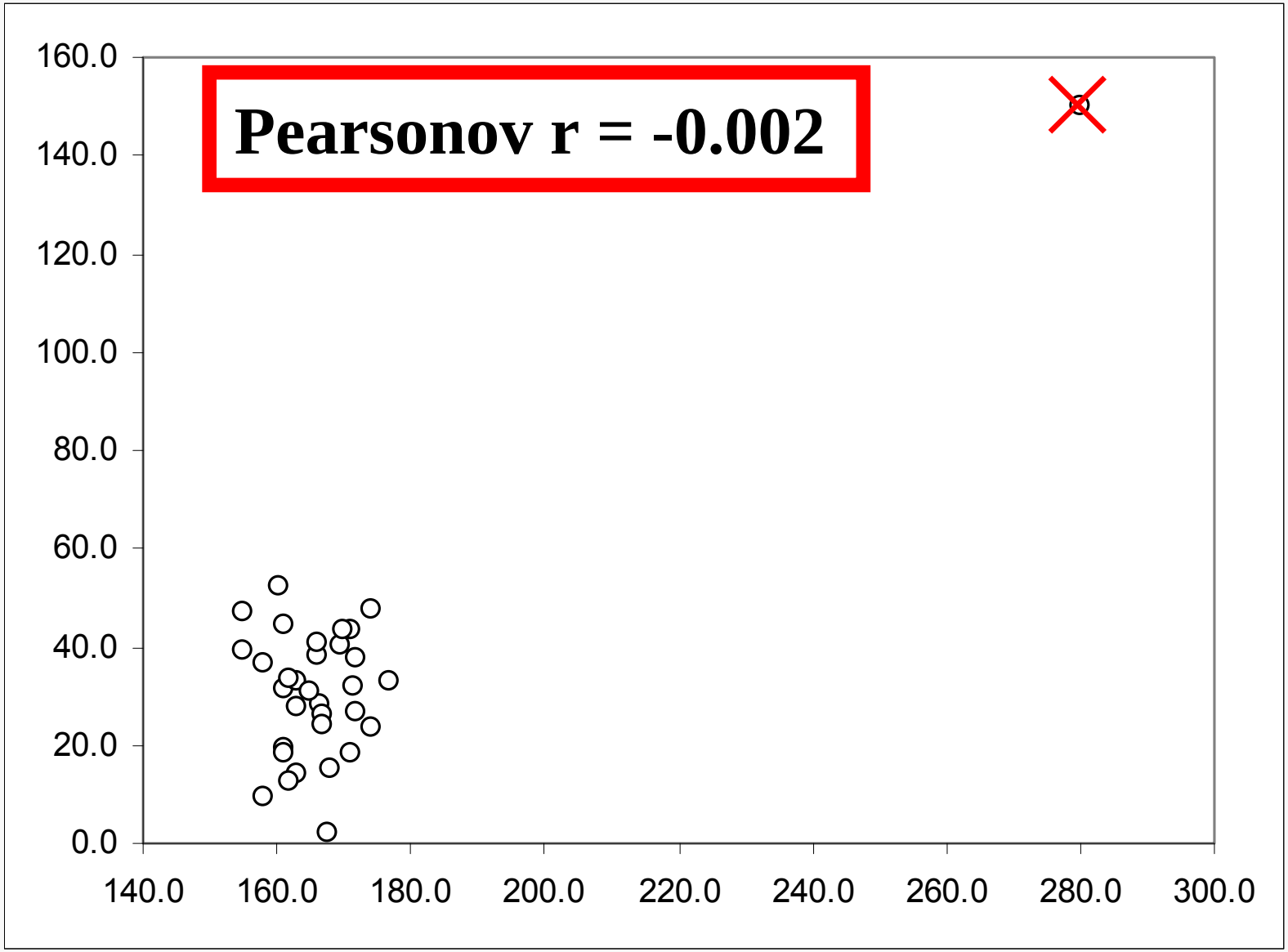


VAŽNO:

Korelacija daje **povezanost**, a ne UZROČNOST !

VAŽNO:
Na koeficijent korelacije jako utječu ekstremne vrijednosti!




Pearsonov r = -0.002
160.0
140.0
120.0
100.0
80.0
60.0
40.0
20.0
0.0
140.0
160.0
180.0
200.0
220.0
240.0
260.0
280.0
300.0

SPEARMANOV KOEFICIJENT KORELACIJE ρ

- **neparametrijski koeficijent korelacije**

KADA?

- **Ordinalne varijable**
- **Jedna ili obje numeričke varijable nisu normalno distribuirane**
- **Prisustvo ekstremnih vrijednosti**

"POINT-BISERIJALNI" KOEFICIJENT KORELACIJE

– korelacija između jedne kontinuirane i jedne dihotomne varijable
– računa se kao Pearson-ov r uz numeriranu dihotomnu varijablu

KOEFICIJENT KORELACIJE Φ

– korelacija između dihotomnih varijabli
– izračunava se direktno iz $\chi 2$ prema formuli

$$\Phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}$$

– značajnost $\chi 2$ ocjenjuje značajnost koeficijenta Φ

KOEFICIJENT KONTINGENCIJE C

– korelacija između varijabli od kojih jedna ili obje imaju više kategorija

– izračunava se direktno iz $\chi 2$ prema formuli

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}}$$

– značajnost $\chi 2$ ocjenjuje značajnost koeficijenta C

– prednost: ne zahtijeva simetričnu raspodjelu varijabli

– nedostatak: maksimalna vrijednost C ovisi o broju kategorija

LINEARNA REGRESIJA

- **ako parovi varijabli pokazuju prisustvo korelacije, funkcionalnu vezu prikazuje** *JEDNADŽBA REGRESIJE*

REGRESIJA - prognoza iz jedne varijable u drugu

linearni slučaj:

- povezanost varijabli je linearna
- ***jednadžba regresije je jednadžba pravca*** oko kojeg se grupiraju parovi varijabli u korelacionom dijagramu

$$y = a + bx$$

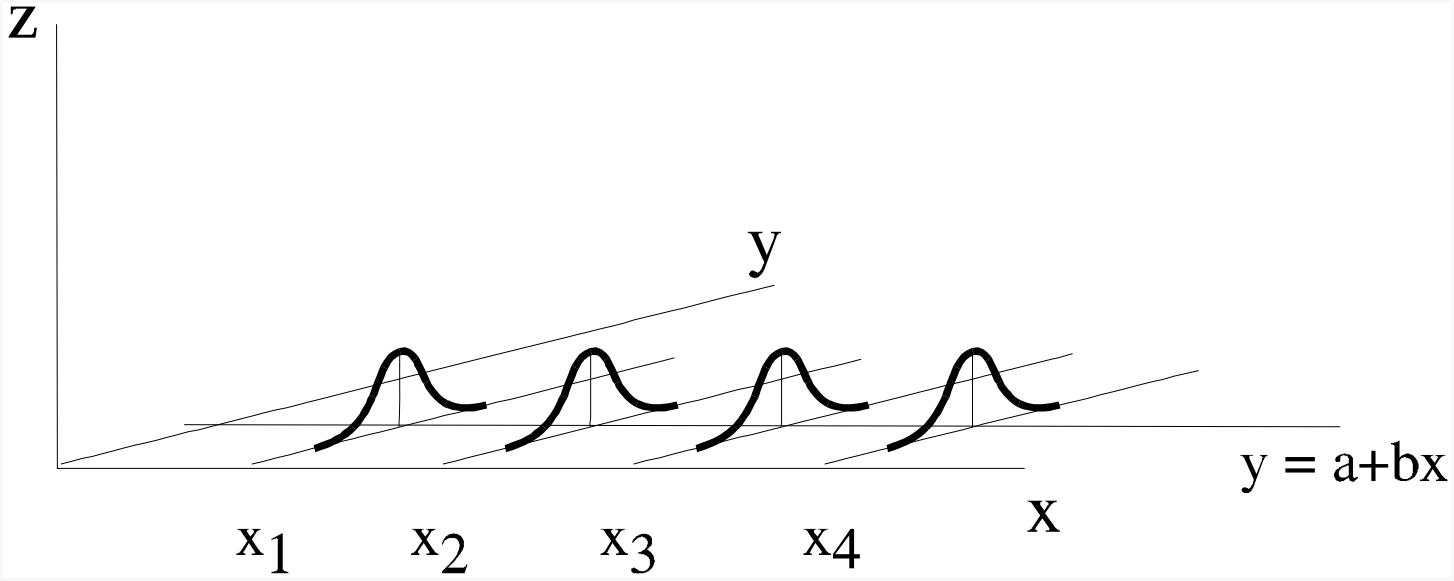
OPĆI OBLIK JEDNADŽBE LINEARNE REGRESIJE

x ... nezavisna varijabla (prediktorska)

y ... zavisna varijabla (kriterijska)

b ... koeficijent smjera

–u realnoj situaciji:



- jednadžba regresijskog pravca dobiva se METODOM NAJMANJIH KVADRATA

uz uvjet $$\sum_i (y_i - y'_i)^2 = \min$$

y'_i ... vrijednost na regresijskom pravcu koja odgovara x_i

iz normalnih jednadžbi

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = Na + b\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{N} x_i + b\sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

KOEFICIJENT REGRESIJE

a ... odsječak na ordinati

$$\mathbf{a = \bar{y} - b\bar{x}}$$

- pravac regresije izražava "prosječni odnos" ("prosječnu vezu") varijabli x i y

LINEARNA REGRESIJA

ocjena modela

Regression

Dependent Y	VC Vitalni kapacitet
Independent X	Visina

Least squares regression

Sample size	33
Coefficient of determination R^2	0.8655
Residual standard deviation	0.2206

87% varijabilnosti vitalnog kapaciteta pluća može se objasniti visinom

poboljšanje u predviđanju zbog korištenja regresijskog modela (razlika sume kvadrata odstupanja od aritmetičke sredine i sume kvadrata odstupanja od vrijednosti predviđenih regresijskim pravcem)

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	1	9.7037	9.7037
Residual	31	1.5085	0.04866
F-ratio			199.4107
Significance level			P<0.0001

suma kvadrata odstupanja od vrijednosti predviđenih regresijskim pravcem

regresijski model značajno bolje predviđa zavisnu varijablu od predviđanja aritmetičkom sredinom

Regression Equation

y = -11.5374 + 0.08927 x

Parameter	Coefficient	Std. Error	95% CI	t	P
Intercept	-11.5374	1.0503	-13.6794 to -9.3953	-10.9851	<0.0001
Slope	0.08927	0.006321	0.07637 to 0.1022	14.1213	<0.0001

VAŽNO:
Predviđanja se smiju raditi samo za vrijednosti iz postojećeg raspona varijabli!

npr. za visinu 175,

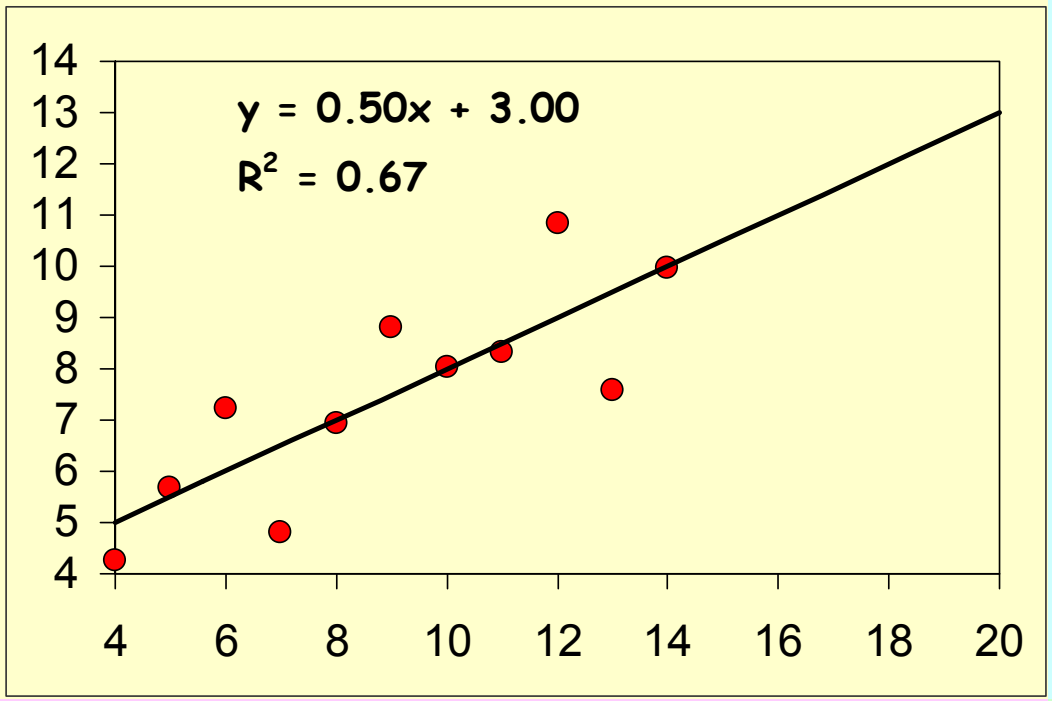
vitalni kapacitet pluća= -11.537+0.089 x 175 = 4.04

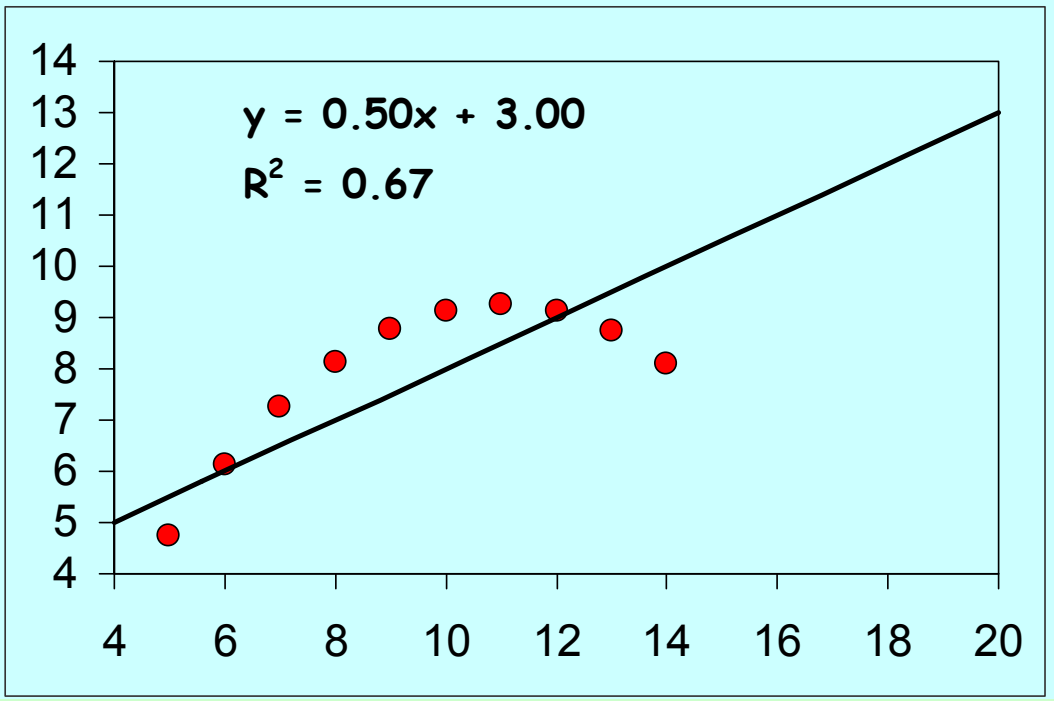
ZAŠTO MORAMO VIDJETI GRAFIČKI PRIKAZ PODATAKA?

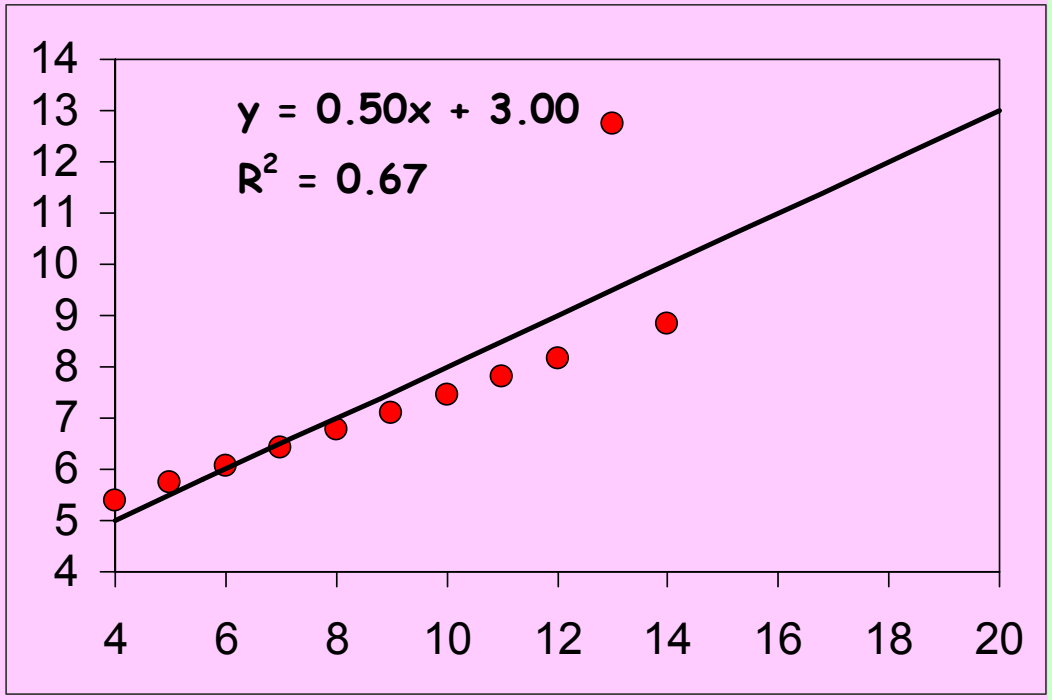
ANSCOMBOVA ČETVORKA

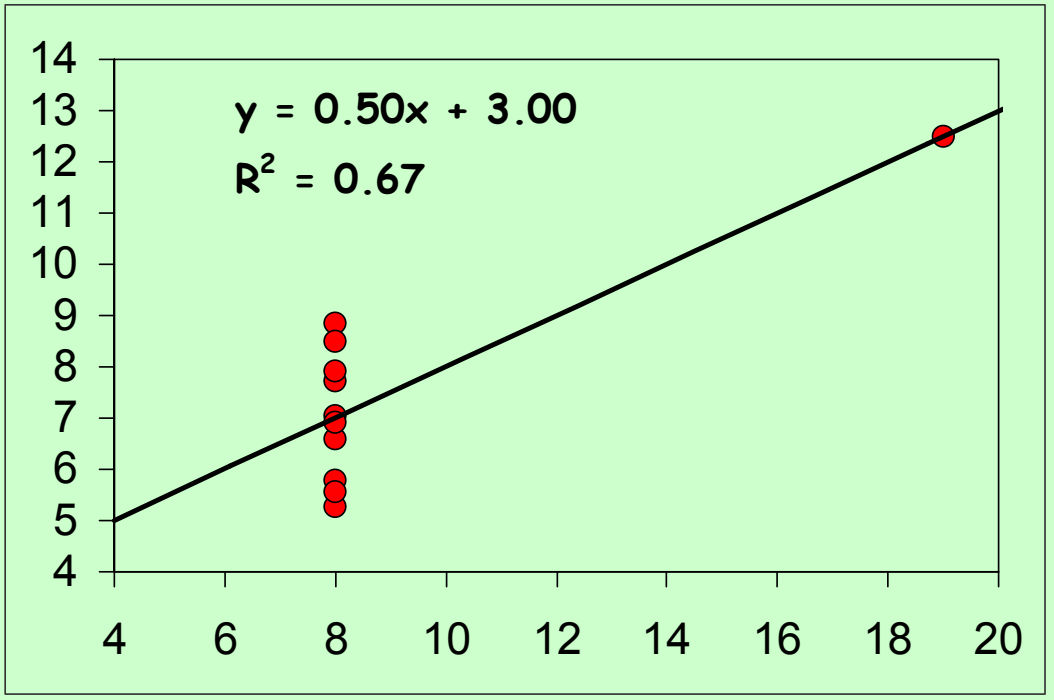
	X1	Y1	X2	Y2	X3	Y3	X4	Y4
1	**10**	**8.04**	**10**	**9.14**	**10**	**7.46**	**8**	**6.58**
2	**8**	**6.95**	**8**	**8.14**	**8**	**6.77**	**8**	**5.76**
3	**13**	**7.58**	**13**	**8.74**	**13**	**12.74**	**8**	**7.71**
4	**9**	**8.81**	**9**	**8.77**	**9**	**7.11**	**8**	**8.84**
5	**11**	**8.33**	**11**	**9.26**	**11**	**7.81**	**8**	**8.47**
6	**14**	**9.96**	**14**	**8.1**	**14**	**8.84**	**8**	**7.04**
7	**6**	**7.24**	**6**	**6.13**	**6**	**6.08**	**8**	**5.25**
8	**4**	**4.26**	**4**	**3.1**	**4**	**5.39**	**19**	**12.5**
9	**12**	**10.84**	**12**	**9.13**	**12**	**8.15**	**8**	**5.56**
10	**7**	**4.82**	**7**	**7.26**	**7**	**6.42**	**8**	**7.91**
11	**5**	**5.68**	**5**	**4.74**	**5**	**5.73**	**8**	**6.89**
$\overline{X}$	9.00	7.50	9.00	7.50	9.00	7.50	9.00	7.50
SD	3.32	2.03	3.32	2.03	3.32	2.03	3.32	2.03
r	0.82		0.82		0.82		0.82	

Anscombe FJ. Graphs in Statistical Analysis. The American Statistician 1973;27(1):17-21.

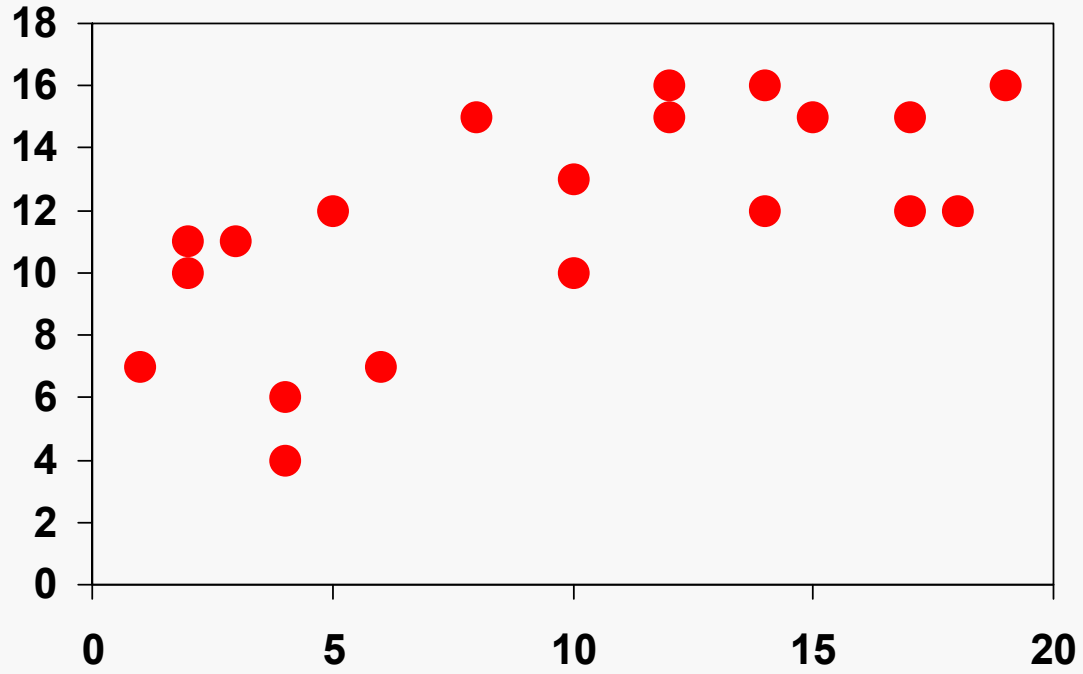

y = 0.50x + 3.00
R² = 0.67


y = 0.50x + 3.00
R² = 0.67

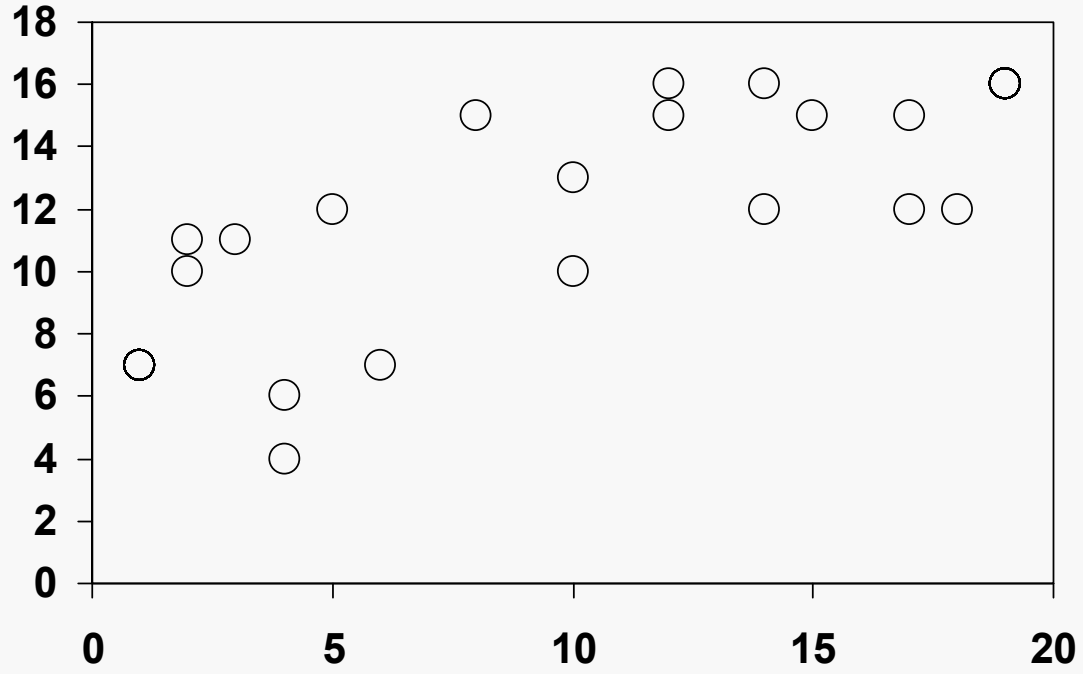

y = 0.50x + 3.00
R² = 0.67


y = 0.50x + 3.00
R² = 0.67

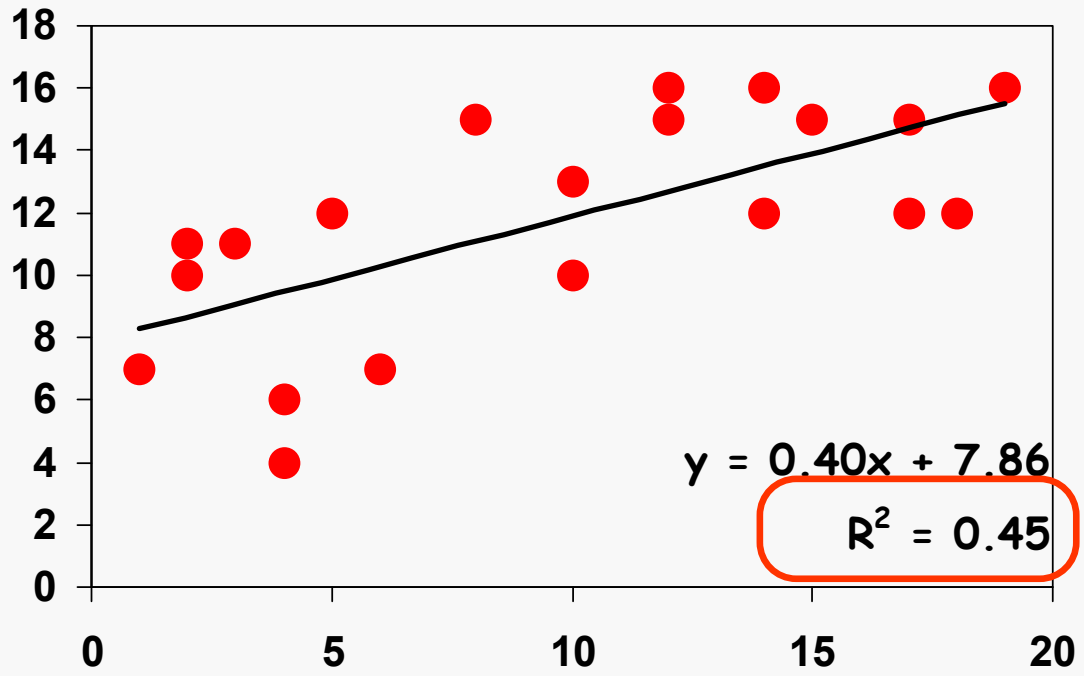
ZAŠTO PROMATRANJE GRAFIČKOG PRIKAZA PODATAKA NIJE UVIJEK DOVOLJNO?

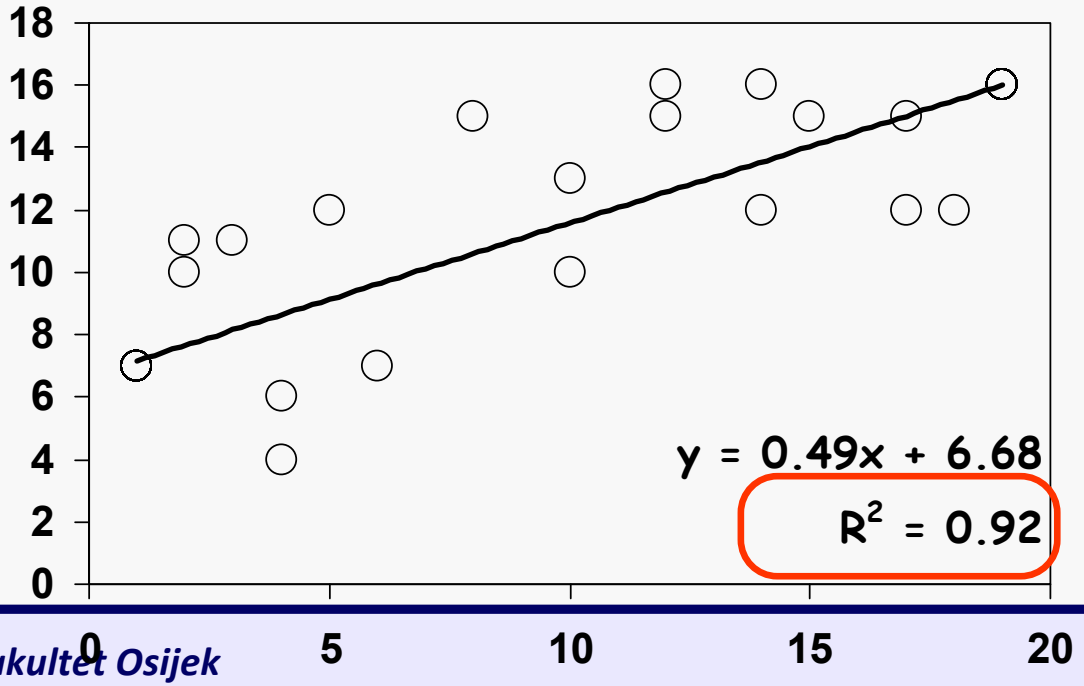


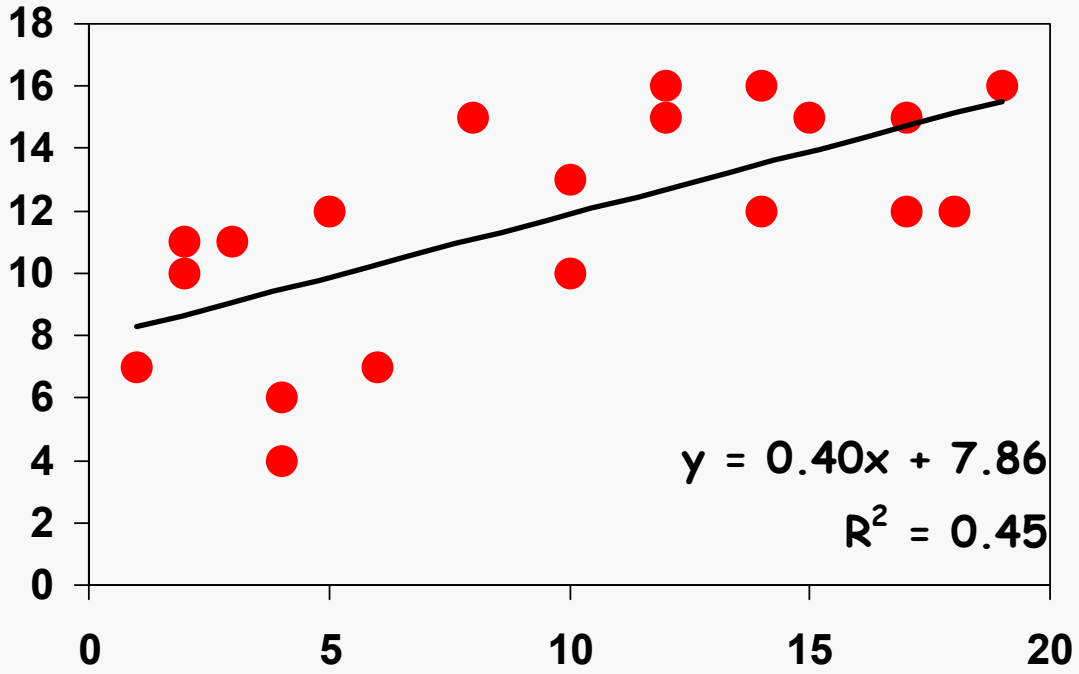
1. SET



2. SET

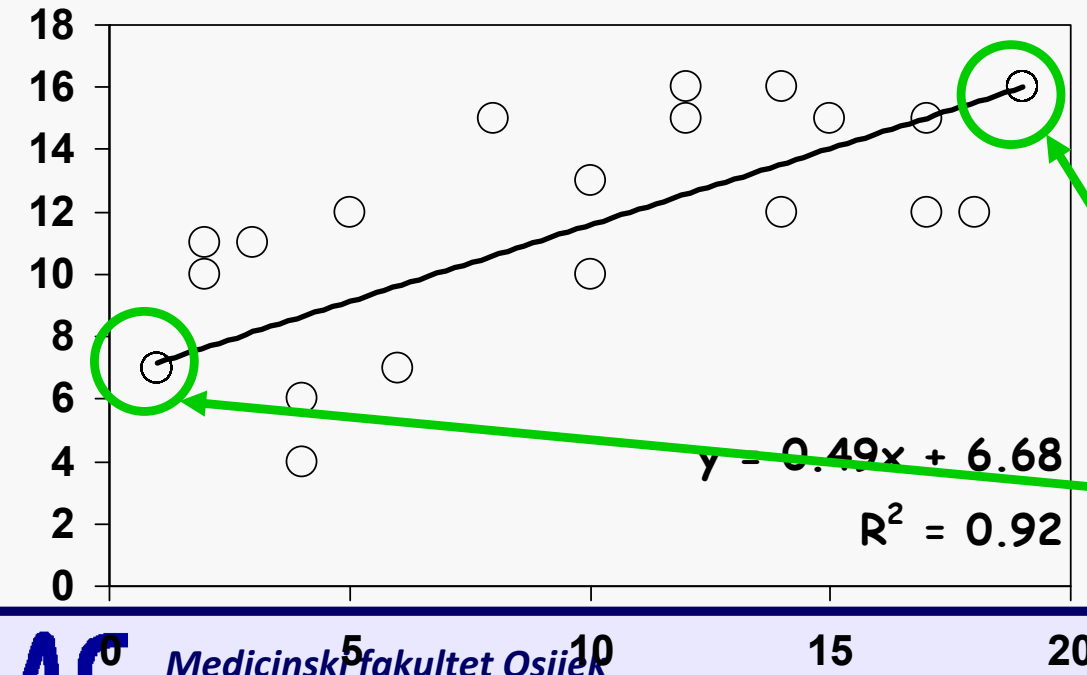

18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
5
10
15
20
y = 0.40x + 7.86
R2 = 0.45


18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
5
10
15
20
y = 0.49x + 6.68
R2 = 0.92



1. SET PODATAKA

n = 20



2. SET PODATAKA

n = 100

točke ponovljene 41 puta

1. set podataka

Rb r	X	Y	Rb r	X	Y
1.	1	7	11.	10	10
2.	2	10	12.	12	15
3.	2	11	13.	12	16
4.	3	11	14.	14	12
5.	4	4	15.	14	16
6.	4	6	16.	15	15
7.	5	12	17.	17	15
8.	6	7	18.	17	12
9.	8	15	19.	18	12
10.	10	13	20.	19	16

2. set podataka

Rbr	X	Y	Rbr	X	Y	Rbr	X	Y	Rbr	X	Y	Rbr	X	Y
1.	1	7	21.	1	7	41.	1	7	61.	19	16	81.	19	16
2.	1	7	22.	1	7	42.	2	10	62.	19	16	82.	19	16
3.	1	7	23.	1	7	43.	2	11	63.	19	16	83.	19	16
4.	1	7	24.	1	7	44.	3	11	64.	19	16	84.	19	16
5.	1	7	25.	1	7	45.	4	4	65.	19	16	85.	19	16
6.	1	7	26.	1	7	46.	4	6	66.	19	16	86.	19	16
7.	1	7	27.	1	7	47.	5	12	67.	19	16	87.	19	16
8.	1	7	28.	1	7	48.	6	7	68.	19	16	88.	19	16
9.	1	7	29.	1	7	49.	8	15	69.	19	16	89.	19	16
10.	1	7	30.	1	7	50.	10	13	70.	19	16	90.	19	16
11.	1	7	31.	1	7	51.	10	10	71.	19	16	91.	19	16
12.	1	7	32.	1	7	52.	12	15	72.	19	16	92.	19	16
13.	1	7	33.	1	7	53.	12	16	73.	19	16	93.	19	16
14.	1	7	34.	1	7	54.	14	12	74.	19	16	94.	19	16
15.	1	7	35.	1	7	55.	14	16	75.	19	16	95.	19	16
16.	1	7	36.	1	7	56.	15	15	76.	19	16	96.	19	16
17.	1	7	37.	1	7	57.	17	15	77.	19	16	97.	19	16
18.	1	7	38.	1	7	58.	17	12	78.	19	16	98.	19	16
19.	1	7	39.	1	7	59.	18	12	79.	19	16	99.	19	16
20.	1	7	40.	1	7	60.	19	16	80.	19	16	100.	19	16