VJEROJATNOST

OSNOVNI POJMOVI TEORIJE VJEROJATNOSTI

- **teorija vjerojatnosti**
  - **matematička teorija slučajnih događaja**
- **SLUČAJNI DOGAĐAJ**
  - **događaj koji ne mora bezuvjetno nastupiti** (pod određenim okolnostima se može, ali i ne mora dogoditi)

POKUS

- **proces dobivanja rezultata opažanja**

- bacanje dva novčića
- određivanje krvne grupe 100 bolesnika i opažanje rezultata
- bacanje dvije igraće kocke
- prebrojavanje bolesnika koji uzimaju terapiju snižavanja lipida u krvi

PROSTOR ISHODA

– skup svih mogućih ishoda nekog pokusa

Prostor ishoda za pokus bacanja dva novčića
(P - pismo, G - glava)

prostor ishoda = { GG, GP, PG, PP}

Prostor ishoda za izvlačenje dvije igraće karte (s obzirom na boju)

prostor ishoda = {■ ■, ■ □, □ ■, □ □}

PROSTOR ISHODA

Prostor ishoda za pokus bacanja dvije igraće kocke

prostor ishoda= {(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) }

PROSTOR ISHODA

Prostor ishoda za pokus određivanja krvne grupe u 100 bolesnika

Krvna grupa	Broj bolesnika
O	42
A	43
B	11
AB	4
Ukupno	100

prostor ishoda= $\{\overbrace{O,O,..O}^{42 \times O}, \overbrace{A,A,..A}^{43 \times A},\overbrace{B,B,..,B}^{11 \times B},\overbrace{AB, AB, AB, AB}^{4 \times AB}\}$

DOGAĐAJ

podskup prostora ishoda, tj. skup ishoda

Pokus: bacanje dva novčića
Događaj: pojava dvije "glave"

(P - pismo, G - glava)

prostor ishoda = { **GG**, GP, PG, PP}

ishod koji realizira događaj

DOGAĐAJ

Pokus: bacanje dvije igraće kocke
Događaj: pojava barem jedne šestice

prostor ishoda= { (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) **(1,6)**
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) **(2,6)**
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) **(3,6)**
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) **(4,6)**
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) **(5,6)**
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) }

ishodi koji realiziraju događaj

DOGAĐAJ

Pokus: određivanje krvne grupe u 100 bolesnika
Događaj: krvna grupa je AB

Krvna grupa	Broj bolesnika
O	42
A	43
B	11
AB	4
Ukupno	100

ishodi koji realiziraju događaj

prostor ishoda= $\{\underbrace{O,O,..O}_{42 \times O},\ \underbrace{A,A,..A}_{43 \times A},\underbrace{B,B,..,B}_{11 \times B},\underbrace{\mathbf{AB, AB, AB, AB}}_{4 \times AB}\}$

KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI (vjerojatnost A PRIORI)

ELEMENTARNI DOGAĐAJ
svaki od n jednako mogućih **ishoda nekog događaja**
prostor elementarnih događaja
skup svih elementarnih događaja

$$\boxed{P(D) = \frac{m(D)}{n}}$$ **vjerojatnost događaja D**

m(D).... broj povoljnih ishoda (događaja koji realiziraju događaj D)
n.......... broj svih ishoda (kardinalni broj prostora elementarnih događaja)

PRIMJER

pokus: bacanje dva novčića

D ....oba novčića su pala na glavu

prostor ishoda = { **GG**, GP, PG, PP}

- taj događaj realizira 1 od 4 jednako moguća događaja

$$\mathbf{P(D) = \frac{1}{4}}$$

pokus: bacanje dvije igraće kocke
D....pojava barem jedne šestice

prostor ishoda= {(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (**1,6**)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (**2,6**)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (**3,6**)
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (**4,6**)
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (**5,6**)
(**6,1**) (**6,2**) (**6,3**) (**6,4**) (**6,5**) (**6,6**) }

- taj događaj realizira 11 od 36 jednako mogućih događaja

$$\mathbf{P(D) = \frac{11}{36}}$$

RELATIVNA FREKVENCIJA

– omjer broja povoljnih ishoda i ukupnog broja pokusa ili ispitanika na kojima promatramo događaj

$$\boxed{f(D) = \frac{m(D)}{n}}$$

RELATIVNA FREKVENCIJA - primjer

Od 674 stanovnika otoka Suska, 312 stanovnika ima krvnu grupu O, 340 grupu A, 17 grupu B a 5 grupu AB. Kolika je vjerojatnost da jedan slučajno odabrani stanovnik ima krvnu grupu O?

D....krvna grupa je O

broj povoljnih ishoda

$$\mathbf{P(D) = \frac{312}{674} \approx 0.46}$$

broj ispitanika

ZAKON VELIKIH BROJEVA

KADA BROJ POKUSA RASTE, APSOLUTNA RAZLIKA IZMEĐU RELATIVNE FREKVENCIJE I VJEROJATNOSTI SE SMANJUJE

VJEROJATNOST A POSTERIORI (statistička vjerojatnost)

- granična vrijednost relativne frekvencije kada broj pokusa raste u beskonačnost

$$\boxed{P(D) = \lim_{n \to \infty} \frac{m(D)}{n}}$$ **vjerojatnost događaja D**

$$\mathbf{m(D) \le n \Rightarrow 0 \le P(D) \le 1}$$

SKALA VJEROJATNOSTI

0 — **1**

područje statističkog zaključivanja

nemoguć događaj — **siguran događaj**

SUBJEKTIVNA VJEROJATNOST

- vjerojatnost događaju D se dodjeljuje prema subjektivnoj procjeni pojedinca

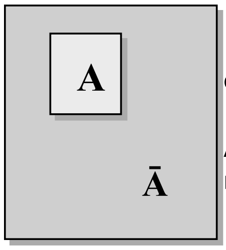
Prijatelj: Odgovor je: D

Ja: Koliko si siguran?

Prijatelj: Više od 77%

OSNOVNA PRAVILA RAČUNA VJEROJATNOSTI

PRAVILO KOMPLEMENTIRANJA (suprotna vjerojatnost)



P(A)... vjerojatnost nastupanja događaja A

Ā ... "non A" (događaj koji označava **ne nastupanje** događaja A)

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

PRAVILO KOMPLEMENTIRANJA - primjer

Ako je vjerojatnost rođenja muškog djeteta 0.52, kolika je vjerojatnost rođenja ženskog djeteta?

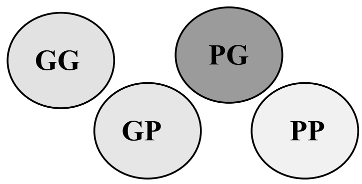
P(muško) = 0.52

P(žensko) = 1 - 0.52 = 0.48

DOGAĐAJI KOJI SE MEĐUSOBNO ISKLJUČUJU

- ne mogu nastupiti istovremeno
- disjunktni događaji

U pokusu bacanja dva novčića sva četiri moguća ishoda se međusobno isključuju



PRAVILO ADICIJE (za događaje koji se međusobno isključuju)

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ događaji koji se međusobno isključuju

A_1 **U** A_2 **U** ....**U** A_k složeni događaj, nastaje kada nastupi **ili** A_1 **ili** A_2 **ili**..**ili** A_k

$$\boxed{P(A_1 U A_2 U \ldots U A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)}$$

PRAVILO ADICIJE - primjer

U nekoj populaciji vjerojatnosti pojedinih krvnih grupa su:

P(O)=0.42, P(A)=0.43, P(B)=0.11 i P(AB)=0.04.

Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani pripadnik te populacije ima krvnu grupu A ili B?

P(A ili B) = 0.43 + 0.11 = 0.54

PRAVILO ADICIJE - primjer

Ako je vjerojatnost svijetle kose 0.20, vjerojatnost smeđe kose 0.40 a vjerojatnost crne kose 020, kolika je vjerojatnost da kosa bude:

a) smeđa ili crna

b) svijetla ili smeđa ili crna?

a) P(smeđa ili crna) = 0.40 + 0.20 = 0.60

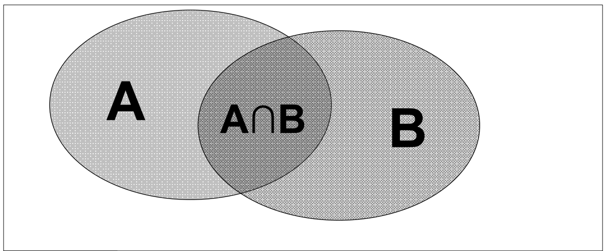
b) P(svijetla ili smeđa ili crna) = 0.20 + 0.40 + 0.20 = 0.80

NEZAVISNI DOGAĐAJI

- događaji koji mogu nastupiti istovremeno, pri čemu vjerojatnost nasupanja nekog od njih ne ovisi o realizaciji drugih

PRAVILO MULTIPLIKACIJE
(za nezavisne događaje)

A , B ...... nezavisni događaji



A ∩ B novi događaj koji nastupi kada se istovremeno realiziraju događaji A i B

PRAVILO MULTIPLIKACIJE
(za nezavisne događaje)

$A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ ... nezavisni događaji

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .... \cap A_k$ događaj koji nastupi kada se istovremeno realiziraju događaji $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .... \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot ... \cdot P(A_k)$$

PRAVILO MULTIPLIKACIJE - primjer

Ako je vjerojatnost svijetle kose 0.30, a vjerojatnost crnih očiju 0.20, kolika je vjerojatnost istovremenog pojavljivanja svijetle kose i crnih očiju?

P(svijetla kosa i crne oči) = 0.30 * 0.20 = 0.06

primjer

Rezultati studije pokazali su da 60% majki djece do 10 godina radi puno radno vrijeme. Ako slučajno odaberemo tri majke, kolika je vjerojatnost da barem jedna od njih radi puno radno vrijeme?

P(barem jedna radi PRV) = 1 - P(niti jedna ne radi PRV) =
= 1 - [(0.4)(0.4)(0.4)] =
= 1 - $(0.4)^3$ = 1 - 0.064 =
= 0.936

...općenito....

vjerojatnost da se u nizu od **m** pokusa događaj **A** pojavi BAREM jedan puta dana je sa:

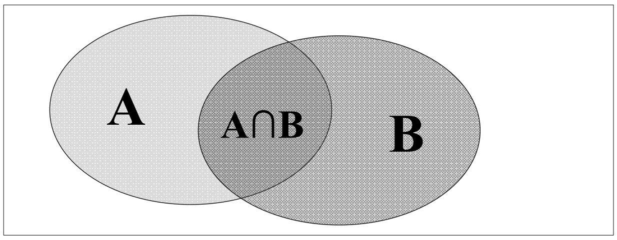
$$\boxed{\mathbf{P}(\text{barem jedan A}) = 1 - q^{m}}$$

q.... vjerojatnost da se **A** NE DOGODI

q = 1 - P(A)

OPĆE PRAVILO ADICIJE

A , B ...... događaji koji mogu istovremeno nastupiti



$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}}$$

OPĆE PRAVILO ADICIJE - primjer

Od 150 studenata u domu 40 je imalo CD, 80 TV a 30 i CD i TV. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani student ima ili CD ili TV?

A ....student ima CD P(A) = 40/150 = 0.2667
B ....student ima TV P(B) = 80/150 = 0.5333
AiB ...student ima i CD i TV P(A ∩ B) = 30/150 = 0.2

P(A U B)= P(A) + P(B) - P(A ∩ B) = 0.2667+0.5333-0.2= = 0.6

UVJETNA VJEROJATNOST

- osnovna vjerojatnost u prirodnim i humanističkim istraživanjima
- ishodu nekog događaja prethodi neki drugi događaj kao uvjet za slijedeći potencijalni događaj

letalitet (stopa umrlih od neke bolesti) je tipična uvjetna vjerojatnost - mora biti zadovoljen uvjet da je osoba oboljela od te bolesti

UVJETNA VJEROJATNOST

A, B...događaji

vjerojatnost događaja B uz uvjet da se događaj A odigrao dana je sa:

$$\boxed{\mathbf{P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}}$$

UVJETNA VJEROJATNOST - primjer

Učestalost sljepoće za boje u ljudskoj populaciji različita je prema spolu (X-kromosomska nasljedna anomalija).

Učestalost (%)

	muškarci	žene	ukupno
slijepi za boje	4,23	0,65	4,88
normalni	48,48	46,64	95,12
ukupno	52,21	47,29	100,00

UVJETNA VJEROJATNOST - primjer

Incidencija sljepoće za boje u muškoj subpopulaciji vodi na uvjetnu vjerojatnost

$$P(S \mid M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)}$$

$P(S \cap M)$	muškarci	žene	ukupno
slijepi za boje	0.0423	0.0065	0.0488
normalni	0.4848	0.4664	0.9512
ukupno	0.5221	0.4729	1.0000

$P(M)$

OPĆE PRAVILO MULTIPLIKACIJE

neka su A, B događaji koji NISU nezavisni

$$\boxed{\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ P(A \cap B) &= P(B)P(A|B) \end{aligned}}$$

A...preživljavanje kemoterapije ; P(A)=0.9

B...izlječenje leukemije

B|A ....izlječenje leukemije pod uvjetom preživljavanja kemoterapije; P(B|A)= 0.8

Kolika je vjerojatnost da bolesnik preživi kemoterapiju i bude izliječen od leukemije?

$$P(A \cap B)=P(A)P(B|A)=0.9*0.8=0.72$$

OPĆE PRAVILO MULTIPLIKACIJE primjer

Morbiditet od neke bolesti u populaciji je 0.10, a letalitet od te iste bolesti u istoj populaciji 0.08. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabran član te populacije oboli i umre?

P(A)= 0.10

$$P(B|A) = 0.08$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.10 * 0.08 = 0.008$$

NEZAVISNI DOGAĐAJI

događaji A i B su nezavisni ako vrijedi:

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$

ili

$$\boxed{P(A \cap B)=P(A)P(B)}$$

NEZAVISNI DOGAĐAJI

	gluhoća		
	postoji	ne postoji	ukupno
slijepi za boje	0.0004	0.0796	0.0800
normalni	0.0046	0.9154	0.9200
ukupno	0.0050	0.9950	1.0000

$P(G|S) = 0.0004/0.0800 = 0.0050$

$P(\overline{G}|S) = 0.0796/0.0800 = 0.9950$

$P(G)$

$P(\overline{G})$

$$P(S \cap G) = P(S) \bullet P(G|S)$$

$$P(G|S) = P(G)$$

$P(S \cap G) = P(S) \bullet P(G)$ ....događaji su nezavisni

RASPODJELE VJEROJATNOSTI

SLUČAJNA VARIJABLA

- pravilo po kojem se pojedinim slučajnim događajima dodjeljuju brojevi (atributi) tako da je uz svaki od njih pridružena određena vjerojatnost

Npr. varijabla **broj infekcija** može poprimiti vrijednosti 0, 1, 2, ...

Zovemo ju **slučajnom** ako je svakoj od vrijednosti pridružena određena vjerojatnost (npr. vjerojatnost da netko ima dvije infekcije u nekoj skupini ljudi je 0,07)

DISKRETNA SLUČAJNA VARIJABLA (definicija)

Diskretna slučajna varijabla je varijabla X koja poprima niz vrijednosti

$x_1, x_2, ..., x_k$

ali svaku od njih s određenom vjerojatnošću

$p(x_1), p(x_2), ..., p(x_k)$, $p(x_i) \geq 0, \forall i$

pri čemu za vjerojatnosti $p(x_i)$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} p(x_i) = 1$$

RASPODJELA slučajne varijable X

skup svih parova $\{ x_i, p(x_i) \}$, i=1,2,...

FUNKCIJA VJEROJATNOSTI slučajne varijable X

zakon p(x) po kojem svakoj vrijednosti x_i pripada vjerojatnost $p(x_i)$

FUNKCIJA RASPODJELE slučajne varijable X

$$F(x_0) = \sum_{x_i \leq x_0} p(x_i)$$

- pokazuje kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi bilo koju vrijednost manju ili jednaku x_0 tj.

$F(x_0) = P\{x \leq x_0\}$

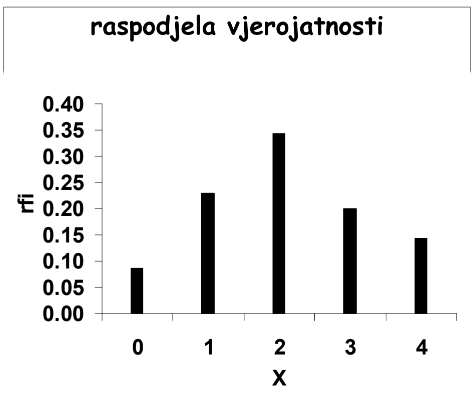
PRIMJER:

Na 35 preparata nekog biološkog materijala mjeren je broj nezrelih stanica. Dobiveni su slijedeći rezultati:

X_i	f_i	rf_i	crf_i	
0	3	0.09 $=p(x_0)$	0.09	$= F(x_0)=p(x_0)$
1	8	0.23 $=p(x_1)$	0.32	$= F(x_1)=p(x_0)+p(x_1)$
2	12	0.34 $=p(x_2)$	0.66	$= F(x_2)=p(x_0)+p(x_1)+p(x_2)$
3	7	0.20 $=p(x_3)$	0.86	:
4	5	0.14 $=p(x_4)$	1.00	:
	35	1.00		

rf_i .... vjerojatnost da je broj nezrelih stanica jednak X_i - $\mathbf{p(x_i)}$

crf_i ... vjerojatnost da je broj nezrelih stanica manji ili jednak X_i - $\mathbf{F(x_i)}$



KONTINUIRANA SLUČAJNA VARIJABLA

- **područje vrijednosti** kontinuirane slučajne varijable je interval na brojevnom pravcu (moguće i čitav brojevni pravac)
- vjerojatnost pridružujemo intervalima brojevnog pravca
- pojedinačnim vrijednostima x_i pripada vjerojatnost 0
- nekom intervalu (x_1, x_2) pridružujemo vjerojatnost $P\{x_1<x<x_2\}$ po **funkciji vjerojatnosti f(x)**

(definicija)

Funkcija vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable X je funkcija f(x) koja ima slijedeća svojstva:

1. $f(x) \geq 0, \forall x$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P\{x_1 < x < x_2\}$

pri čemu su x_1, x_2 bilo koje dvije vrijednosti varijable x takve da je $x_1 < x_2$

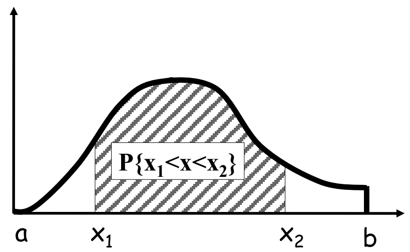
značenje svojstava funkcije vjerojatnosti:

- **1. svojstvo** – NENEGATIVNOST (vjerojatnost ne može biti negativan broj)
- **2. svojstvo** – VJEROJATNOST SIGURNOG DOGAĐAJA je 1
  - ako je područje vrijednosti slučajne varijable X interval (a,b), onda 2. svojstvo poprima oblik

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = 1}$$

i uzimamo da je **f(x)=0** za sve vrijednosti x izvan područja vrijednosti, tj. intervala (a,b)

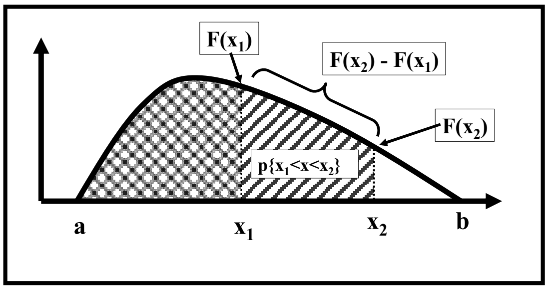
- 3. svojstvo – $P\{x_1<x<x_2\}$ je numerički jednaka površini ispod krivulje vjerojatnosti nad intervalom (x_1, x_2)



FUNKCIJA RASPODJELE kontinuirane slučajne varijable

$$\boxed{F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = P\{x \leq x_0\}}$$

- pokazuje kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi bilo koju vrijednost manju ili jednaku x_0



KARAKTERISTIČNE VRIJEDNOSTI SLUČAJNIH VARIJABLI

OČEKIVANJE (sredina) SLUČAJNE VARIJABLE

$$E(x) = \mu = \sum_i x_i p(x_i)$$ **očekivanje diskretne slučajne varijable**

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$ **očekivanje kontinuirane slučajne varijable**

- kod empirijske raspodjele frekvencija to je aritmetička sredina:

$$\mu = \frac{\sum_i x_{i0}}{N} = \frac{\sum_i f_i x_i}{N} = \sum_i f_{ri} x_i$$

VARIJANCA (disperzija) SLUČAJNE VARIJABLE

$$V(x) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$ **varijanca diskretne slučajne varijable**

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$ **varijanca kontinuirane slučajne varijable**

- kod empirijske raspodjele frekvencija:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_{i0} - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_i f_i (x_i - \mu)^2}{N} = \sum_i f_{ri} (x_i - \mu)^2$$

TEORIJSKE RASPODJELE

BINOMNA RASPODJELA X~B(n,p)

- $(p+q)^n$

BERNOULLIJEV DOGAĐAJ

- događaj A čija se vjerojatnost nastupanja **P(A) = p** ne mijenja tijekom pokusa, a **vjerojatnost NE nastupanja** događaja A je **q = 1 - p**

npr. u pokusu bacanja novčića pri svakom bacanju novčića vjerojatnost pojave "grba" je p = 0,5

- vjerojatnost da Bernoullijev događaj A u nizu od n pokusa nastupi x puta:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

BERNOULLIJEVA FORMULA

gdje je $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ BINOMNI KOEFICIJENT

BINOMNA RASPODJELA

- skup svih parova {x, P(x)}, x = 0, 1, 2, ..., n

Primjer rekombinacije gena:

Vjerojatnost pojave gena A je p(A)=p, a vjerojatnost pojave gena a je p(a)=q. Koje su vjerojatnosti mogućih genotipova?

Mogu nastupiti kombinacije: AA, Aa, aA, aa. Aa i aA se ne mogu biološki razlikovati => prostor ishoda je {AA,Aa,aa}

$$P(AA) = \binom{2}{2} p^2 q^{2-2} = p^2$$

$$P(Aa) = \binom{2}{1} p^1 q^{2-1} = 2pq$$

$$P(aa) = \binom{2}{0} p^0 q^{2-0} = q^2$$

KARAKTERISTIKE BINOMNE RASPODJELE

- jednoznačno je određena parametrima **n**, **p**

$$\boxed{E(x) = np}$$ **OČEKIVANJE**

$$\boxed{\sigma^2 = V(x) = npq}$$ **VARIJANCA**

KARAKTERISTIKE BINOMNE RASPODJELE

KOEFICIJENT ASIMETRIJE

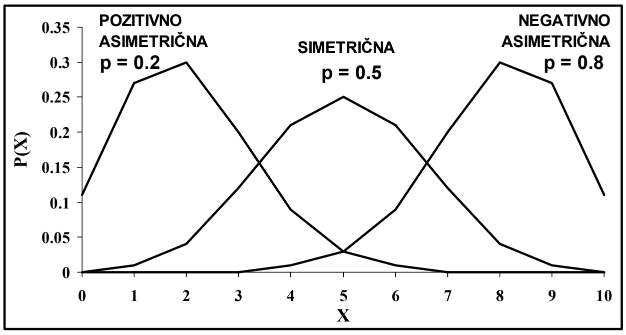
$$\boxed{\alpha_3 = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}}$$

KOEFICIJENT SPLJOŠTENOSTI

$$\boxed{\alpha_4 = 3 + \frac{1 - 6pq}{npq}}$$

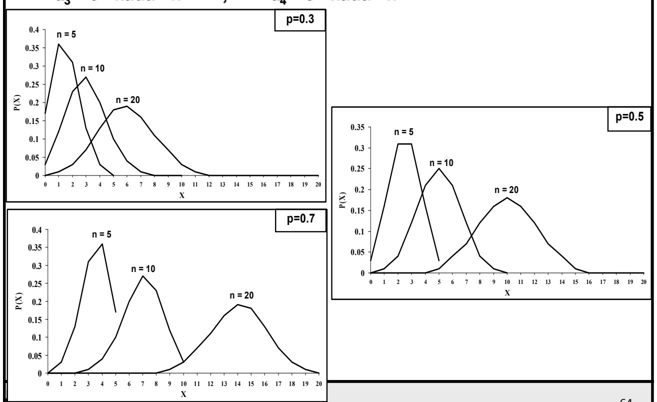
- SIMETRIČNA za p = q = 1/2
- POZITIVNO ASIMETRIČNA ako je q>p, tj. q > 1/2
- NEGATIVNO ASIMETRIČNA ako je q<p, tj. q < 1/2

BINOMNA RASPODJELA ZA RAZLIČITE PARAMETRE p



- bez obzira na međusobni odnos parametara p i q, vrijedi:

$\alpha_3 \to 0$ kada $n \to \infty$; $\alpha_4 \to 3$ kada $n \to \infty$



PRIMJENA BINOMNE RASPODJELE ZA PROCJENU VJEROJATNOSTI SMRTNOG ISHODA

Ako je letalitet od neke bolesti p=0,30 a vjerojatnost preživljavanja q=0,70 pitanje vjerojatnosti smrtnog ishoda i preživljavanja za 5 bolesnika možemo prikazati kao binomnu raspodjelu (n=5; p=0,30)

PRIMJENA BINOMNE RASPODJELE ZA PROCJENU VJEROJATNOSTI SMRTNOG ISHODA

BROJ UMRLIH	VJEROJATNOST	
0	$P(0) = \binom{5}{0} p^0 q^5 = q^5$	=0.16807
1	$P(1) = \binom{5}{1} p^1 q^4 = 5pq^4$	=0.36015
2	$P(2) = \binom{5}{2} p^2 q^3 = 10p^2 q^3$	=0.30870
3	$P(3) = \binom{5}{3} p^3 q^2 = 10p^3 q^2$	=0.13230
4	$P(4) = \binom{5}{4} p^4 q^1 = 5p^4 q$	=0.02835
5	$P(5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 = p^5$	= 0.00243

PRILAGOĐAVANJE BINOMNE RASPODJELE EMPIRIJSKIM PODATCIMA

Pokus: 1000 bacanja 7 novčića. Kolike su očekivane frekvencije pojavljivanja grba uz pretpostavku da su novčići ispravni?

Znamo:

- novčići su ispravni => p = 0.5, q = 0.5
- u svakom je bacanju 7 novčića => n = 7
- vjerojatnost pojave X grbova dana je sa

$$P(x)=\binom{7}{x}p^x q^{7-x}=\binom{7}{x}0.5^x 0.5^{7-x}=\binom{7}{x}0.5^7$$

x	P(x)	P(x)*N	f_{ex}
0	$\binom{7}{0}0.5^7=0.5^7$	7.81	8
1	$\binom{7}{1}0.5^7=7\cdot 0.5^7$	54.69	55
2	$\binom{7}{2}0.5^7=21\cdot 0.5^7$	164.06	164
3	$\binom{7}{3}0.5^7=35\cdot 0.5^7$	273.44	273
4	$\binom{7}{4}0.5^7=35\cdot 0.5^7$	273.44	273
5	$\binom{7}{5}0.5^7=21\cdot 0.5^7$	164.06	164
6	$\binom{7}{6}0.5^7=7\cdot 0.5^7$	54.69	55
7	$\binom{7}{7}0.5^7=0.5^7$	7.81	8

POISSONOVA RASPODJELA

- granični prijelaz binomne raspodjele kada **n** $\to\infty$ uz uvjet **n·p = const.**

$$P(x)=\frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!},\quad P(0)=e^{-\mu}$$

funkcija vjerojatnosti Poissonove raspodjele

gdje je μ= n·p ; e .... baza prirodnog logaritma (e ≈ 2.72)

KARAKTERISTIKE POISSONOVE RASPODJELE

- **jednoznačno je određena parametrom μ**

$\boxed{E(x)=\mu}$ **OČEKIVANJE**

$\boxed{\sigma^2=V(x)=\mu}$ **VARIJANCA**

KARAKTERISTIKE POISSONOVE RASPODJELE

KOEFICIJENT ASIMETRIJE

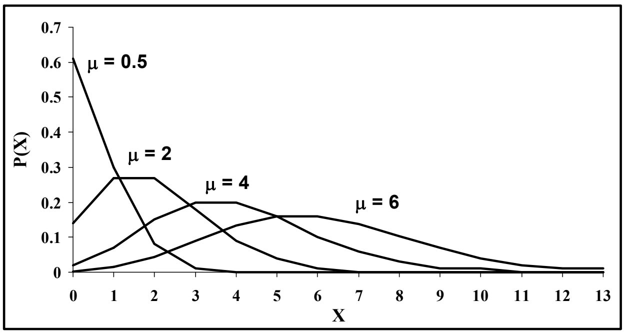
$$\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

KOEFICIJENT SPLJOŠTENOSTI

$$\alpha_4=3+\frac{1}{\mu}$$

- $\alpha_3>0,\ \forall\mu$ (pozitivna asimetrija)
- povećanjem parametra μ asimetrija se smanjuje

POISSONOVA RASPODJELA ZA RAZLIČITE PARAMETRE μ



POISSONOVA RASPODJELA

- opisuje slučajnu raspodjelu događaja u vremenu ili sitnih čestica u prostoru
- raspodjela "rijetkih događaja"

PRIMJER: U promatranjima Rutherforda i Geigera ustanovljeno je da jedan radioaktivan izvor emitira u prosjeku 3.87 α čestica u vremenskom intervalu od 7.5 sekundi. Kolika je vjerojatnost da je u jednoj sekundi emitirana: a) najviše 1 čestica? b) najmanje 1 čestica?

$$P(x)=\frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!},\quad P(0)=e^{-\mu}\qquad \mu=\frac{3.87}{7.5}=0.516$$

a) P(x≤1)=P(0)+P(1)

$$P(0)=e^{-\mu}=e^{-0.516}=0.5969$$

$$P(1)=\frac{0.516^1 e^{-0.516}}{1!}=0.516\cdot 0.5969=0.3080$$

P(x≤1)=P(0)+P(1)=0.5969+0.3080=0.9049

b) P(x≥1) = 1-P(x<1) = 1-P(0) = 1-0.5969 = 0.4031

Aproksimacija binomne razdiobe Poissonovom

- **u slučajevima kad je** n·p ≤ 10 uz n > 50

PRIMJER: U seriji automatski očitanih nalaza KKS prosječno je 1% pogrešnih.

a) Kolika je vjerojatnost da od 200 nalaza ne bude niti jedan pogrešan?
b) Kolika je vjerojatnost da će u 300 nalaza biti najviše 1 pogrešan?

a) p=0.01
n=200
μ=n·p=2

$$P(0)=e^{-\mu}=e^{-2}=0.1353$$

b) p=0.01
n=300
μ=n·p=3

$$P(x)=\frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

P=P(x≤1)=P(0)+P(1)

$$P(0)=e^{-\mu}=e^{-3}=0.0498$$

$$P(1)=\frac{3^1 e^{-3}}{1!}=3\cdot e^{-3}=3\cdot 0.0498=0.1494$$

P=P(x≤1)=P(0)+P(1) = 0.0498 + 0.1494 = 0.1992

PRILAGOĐAVANJE POISSONOVE RASPODJELE EMPIRIJSKIM PODATCIMA

Na 576 ploča hranjivih podloga prebrojane su bakterije i dobiveno je sljedeće:
- na 229 pločica nije nađena niti jedna bakterija
- na 211 pločica nađena je 1 bakterija
- na 93 pločice nađene su 2 bakterije
- na 35 pločica nađene su 3 bakterije
- na 7 pločica nađene su 4 bakterije
- na jednoj pločici nađeno je 7 bakterija.

Odgovara li rast bakterija Poissonovoj raspodjeli?

vrijedi: $\frac{p(x)}{p(x-1)}=\frac{\mu}{x}\Rightarrow p(x)=\frac{\mu}{x}p(x-1)$

x	f_x	$x\cdot f_x$	μ/x	p(x)	$f_{ex}=N\cdot p(x)$	f_{ex}
0	229	0	-	0.39365	226.74	227
1	211	211	0.9323	0.36700	211.39	211
2	93	186	0.4662	0.17108	98.54	99
3	35	105	0.3108	0.05317	30.63	31
4	7	28	0.2331	0.01239	7.14	7
5	0	0	0.1865	0.00231	1.33	1
6	0	0	0.1554	0.00036	0.21	0
7	1	7	0.1332	0.00005	0.03	0
	576	537				576

$$\mu=\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_i x_i f_{xi}=\frac{537}{576}=0.9323;\qquad P(0)=e^{-\mu}=e^{-0.9323}=0.3936$$

NORMALNA RASPODJELA X~N(μ,σ²)

- slučajna varijabla X ima normalnu raspodjelu ako je područje njenih vrijednosti <-∞,+∞>, a funkcija vjerojatnosti

$$f(x)=\frac{1}{b\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$$

FUNKCIJA VJEROJATNOSTI NORMALNE RASPODJELE

NORMALNA RASPODJELA X~N(μ,σ^2) .... svojstva ....

OČEKIVANJE $\boxed{E(X)= \mu = a}$

VARIJANCA $\boxed{V(X)= \sigma^2 = b^2}$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

FUNKCIJA VJEROJATNOST I NORMALNE RASPODJELE

- **jednoznačno je određena parametrima μ, σ^2**

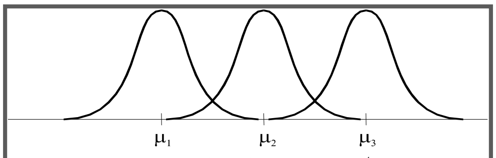
NORMALNA RASPODJELA X~N(μ,σ^2) ... svojstva ...

koeficijent asimetrije $\boxed{\alpha_3 = 0}$

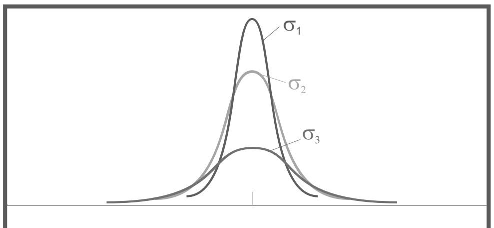
- simetrična s obzirom na pravac x = μ

koeficijent spljoštenosti $\boxed{\alpha_4 = 3}$

NORMALNA RASPODJELA X~N(μ,σ^2) .... svojstva ...



$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, σ = const.

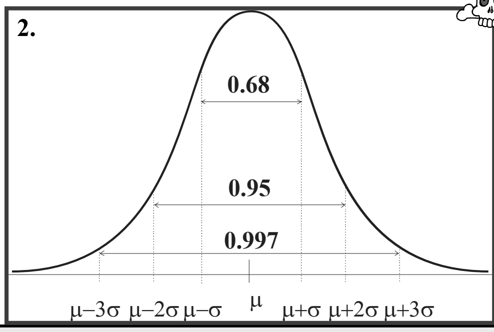


$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, μ = const.

NORMALNA RASPODJELA X~N(μ,σ^2) ... svojstva ....

1. μ = Me = Mo

2.



NORMALNA RASPODJELA X~N(μ,σ^2) .... svojstva ....

3. Površina ispod krivulje normalne raspodjele u intervalu između dvije vrijednosti koje su definirane udaljenošću od aritmetičke sredine izražene u standardnim devijacijama je KONSTANTNA bez obzira na stvarne vrijednosti aritmetičke sredine i standardne devijacije u pojedinom slučaju

Npr:

a)

x_1= 2.5
x_2= 3.5
μ = 3
σ = 0.5
$P(x_1<x<x_2)$=?

x_1 = 2.5 = μ - σ
x_2 = 3.5 = μ + σ
$P(x_1<x<x_2)$= $P(\mu-\sigma<x<\mu+\sigma)$=**0.68**

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$z_{a1} = \frac{x_{a1}-\mu_a}{\sigma_a} = \frac{2.5-3}{0.5} = -1$$

$$z_{a2} = \frac{x_{a2}-\mu_a}{\sigma_a} = \frac{3.5-3}{0.5} = 1$$

b)

x_1 = 10
x_2 = 14
μ = 12
σ = 2
$P(x_1<x<x_2)$=?

x_1 = 10 = μ - σ
x_2 = 14 = μ + σ
$P(x_1<x<x_2)$=$P(\mu-\sigma<x<\mu+\sigma)$=**0.68**

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$z_{b1} = \frac{x_{b1}-\mu_b}{\sigma_b} = \frac{10-12}{2} = -1$$

$$z_{b2} = \frac{x_{b2}-\mu_b}{\sigma_b} = \frac{14-12}{2} = 1$$

$$\boxed{z = \frac{x-\mu}{\sigma}}$$

STANDARDIZIRANA VRIJEDNOST

(standardized deviate, z-value)

- supstitucijom u funkciju vjerojatnosti normalne raspodjele dobivamo:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}}$$

funkcija od z

STANDARDNA (jedinična) NORMALNA RASPODJELA X~N(0,1)

$$\boxed{\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}}$$

FUNKCIJA VJEROJATNOSTI STANDARDNE NORMALNE RASPODJELE

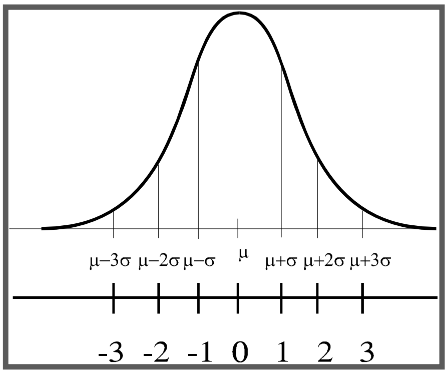
$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(z)$$

OČEKIVANJE $\boxed{E(z) = 0}$

VARIJANCA $\boxed{V(z) = 1}$

X~N(0,1)

PRETVARANJE LJESTVICE MJERENJA U STANDARDIZIRANU Z-LJESTVICU

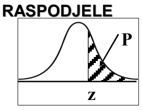


ljestvica mjerenja

z - ljestvica

TABLICA POVRŠINA ISPOD STANDARDNE NORMALNE RASPODJELE

- **Tablica sadrži vrijednosti površina samo za nenegativne z vrijednosti (z ≥ 0) i to iznad intervala <z, +∞>.**
- **Za odgovarajuće negativne z vrijednosti površina je jednaka, tj. P-z = P(−∞<x<−z) = P(z<x<+∞) = P+z**



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	[illegible]	[illegible]	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	[illegible]	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681

površina ispod krivulje funkcije vjerojatnosti standardne normalne raspodjele iznad intervala <z, +∞>, za z=0.44

Na velikom uzorku izmjerena je visina desetogodišnjih dječaka. Aritmetička sredina visine bila je 137cm, a standardna devijacija 5cm. Kolika je visina od koje je 20% dječaka višlje?

P(z)=0.20

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	**0.2005**	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611

z=0.84

iz $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma \cdot z + \mu = 5cm \cdot 0.84 + 137cm = 141.2cm$

Koliki postotak dječaka ima visinu:

a) do 126cm

b) između 126cm i 134cm

c) između 134cm i 144cm

d) iznad 144cm

e) do 144cm?

a) $z_{126} = \frac{126-137}{5} = -2.2 \qquad P(z_{126}) = P_a = 0.0139 \Rightarrow 1.39\%$

b) $z_{134} = \frac{134-137}{5} = -0.6 \quad P(z_{134}) = 0.2743$

$P_b = P(z_{134}) - P(z_{126}) = 0.2604 \Rightarrow 26.04\%$

c) $z_{144} = \frac{144-137}{5} = 1.4 \qquad P(z_{144}) = 0.0808$

$P_c = 1 - [P(z_{134}) + P(z_{144})] = 1 - (0.2743 + 0.0808) = 0.6449 \quad \Rightarrow 64.49\%$

d) $P_d = P(z_{144}) = 0.0808 \quad \Rightarrow 8.08\%$

e) $P_e = 1 - P_d = 1 - P(z_{144}) = 1 - 0.0808 = 0.9192 \quad \Rightarrow 91.92\%$