VJEROJATNOST

OSNOVNI POJMOVI TEORIJE VJEROJATNOSTI

- **teorija vjerojatnosti**
  - **matematička teorija slučajnih događaja**

- **SLUČAJNI DOGAĐAJ**
  - **događaj koji ne mora bezuvjetno nastupiti** (pod određenim okolnostima se može, ali i ne mora dogoditi)

POKUS

- **proces dobivanja rezultata opažanja**

- bacanje dva novčića

- određivanje krvne grupe 100 bolesnika i opažanje rezultata

- bacanje dvije igraće kocke

- prebrojavanje bolesnika koji uzimaju terapiju snižavanja lipida u krvi

PROSTOR ISHODA

– skup svih mogućih ishoda nekog pokusa

Prostor ishoda za pokus bacanja dva novčića

(P - pismo, G - glava)

prostor ishoda = { GG, GP, PG, PP}

Prostor ishoda za izvlačenje dvije igraće karte (s obzirom na boju)

prostor ishoda = {▤ ▤, ▤ ▤, ▤ ▤, ▤ ▤}

PROSTOR ISHODA

Prostor ishoda za pokus bacanja dvije igraće kocke

prostor ishoda = {(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)
(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6) }

PROSTOR ISHODA

Prostor ishoda za pokus određivanja krvne grupe u 100 bolesnika

Krvna grupa	Broj bolesnika
O	42
A	43
B	11
AB	4
Ukupno	100

prostor ishoda= $\{\overbrace{O,O,..O}^{42\text{ x }O}, \overbrace{A,A,..A}^{43\text{ x }A},\overbrace{B,B,..,B}^{11\text{ x }B},\overbrace{AB, AB, AB, AB}^{4\text{ x }AB}\}$

DOGAĐAJ

podskup prostora ishoda, tj. skup ishoda

Pokus: bacanje dva novčića
Događaj: pojava dvije "glave"

(P - pismo, G - glava)

prostor ishoda = { **GG**, GP, PG, PP}

ishod koji realizira događaj

DOGAĐAJ

Pokus: bacanje dvije igraće kocke

Događaj: pojava barem jedne šestice

prostor ishoda= { (1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) **(1, 6)**

(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) **(2, 6)**

(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) **(3, 6)**

(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) **(4, 6)**

(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) **(5, 6)**

(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6) }

ishodi koji realiziraju događaj

DOGAĐAJ

Pokus: određivanje krvne grupe u 100 bolesnika

Događaj: krvna grupa je AB

Krvna grupa	Broj bolesnika
O	42
A	43
B	11
AB	4
Ukupno	100

ishodi koji realiziraju događaj

prostor ishoda= {$\underbrace{\text{O,O,..O}}_{42 \times O}$, $\underbrace{\text{A,A,..A}}_{43 \times A}$,$\underbrace{\text{B,B,..,B}}_{11 \times B}$,$\underbrace{\text{AB, AB, AB, AB}}_{4 \times AB}$}

KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI (vjerojatnost A PRIORI)

ELEMENTARNI DOGAĐAJ

svaki od n jednako mogućih **ishoda nekog događaja**

prostor elementarnih događaja

skup svih elementarnih događaja

$$\boxed{P(D) = \frac{m(D)}{n}}$$ **vjerojatnost događaja D**

m(D).... broj povoljnih ishoda (događaja koji realiziraju događaj D)

n.......... broj svih ishoda (kardinalni broj prostora elementarnih događaja)

PRIMJER

pokus: bacanje dva novčića

D ....oba novčića su pala na glavu

prostor ishoda = { **GG**, GP, PG, PP}

- taj događaj realizira 1 od 4 jednako moguća događaja

$$P(D) = \frac{1}{4}$$

pokus: bacanje dvije igraće kocke

D....pojava barem jedne šestice

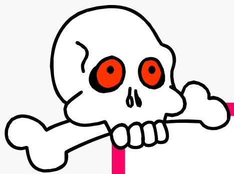
prostor ishoda= {(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (**1, 6**)
(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (**2, 6**)
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (**3, 6**)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (**4, 6**)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (**5, 6**)
(**6, 1**) (**6, 2**) (**6, 3**) (**6, 4**) (**6, 5**) (**6, 6**) }

- taj događaj realizira 11 od 36 jednako mogućih događaja

$$\mathbf{P(D) = \frac{11}{36}}$$

RELATIVNA FREKVENCIJA

– omjer broja povoljnih ishoda i ukupnog broja pokusa ili ispitanika na kojima promatramo događaj



$$\boxed{f(D) = \frac{m(D)}{n}}$$

RELATIVNA FREKVENCIJA - primjer

Od 674 stanovnika otoka Suska, 312 stanovnika ima krvnu grupu O, 340 grupu A, 17 grupu B a 5 grupu AB. Kolika je vjerojatnost da jedan slučajno odabrani stanovnik ima krvnu grupu O?

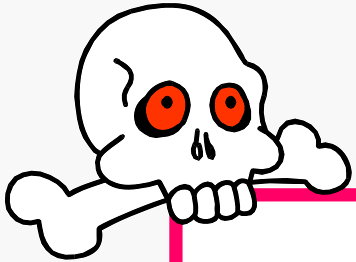
D....krvna grupa je O

broj povoljnih ishoda

$$P(D) = \frac{312}{674} \approx 0{,}46$$

broj ispitanika

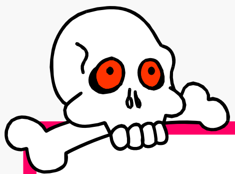
ZAKON VELIKIH BROJEVA



KADA BROJ POKUSA RASTE, APSOLUTNA RAZLIKA IZMEĐU RELATIVNE FREKVENCIJE I VJEROJATNOSTI SE SMANJUJE

VJEROJATNOST A POSTERIORI (statistička vjerojatnost)

- granična vrijednost relativne frekvencije kada broj pokusa raste u beskonačnost



$$\boxed{P(D) = \lim_{n \to \infty} \frac{m(D)}{n}}$$

vjerojatnost događaja D

$$\mathbf{m(D) \leq n \Rightarrow 0 \leq P(D) \leq 1}$$

SKALA VJEROJATNOSTI

SUBJEKTIVNA VJEROJATNOST

- vjerojatnost događaju D se dodjeljuje prema subjektivnoj procjeni pojedinca

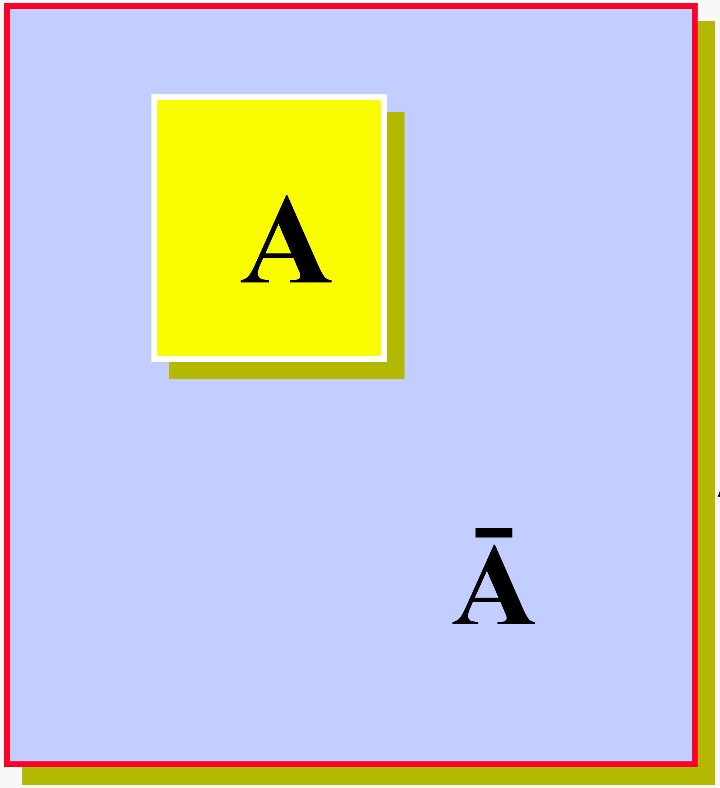
Prijatelj: Odgovor je: D

Ja: Koliko si siguran?

Prijatelj: Više od 77%

OSNOVNA PRAVILA RAČUNA VJEROJATNOSTI

PRAVILO KOMPLEMENTIRANJA (suprotna vjerojatnost)



P(A)... vjerojatnost nastupanja događaja A

Ā ... "non A” (događaj koji označava **ne nastupanje** događaja A)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

PRAVILO KOMPLEMENTIRANJA - primjer

Ako je vjerojatnost rođenja muškog djeteta 0.52, kolika je vjerojatnost rođenja ženskog djeteta?

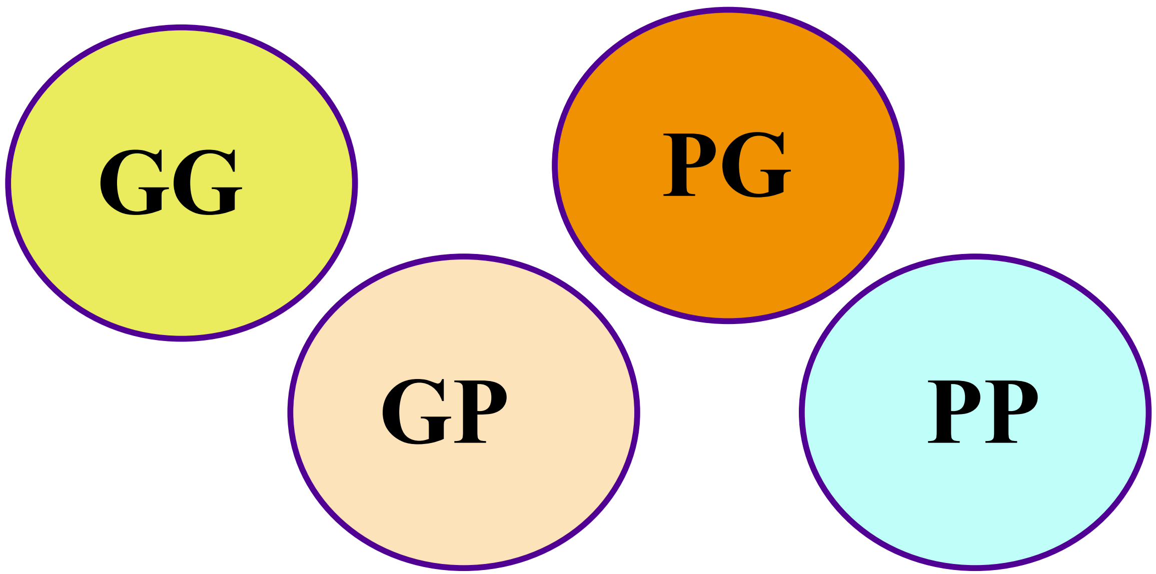
P(muško) = 0,52

P(žensko) = 1 – 0,52 = 0,48

DOGAĐAJI KOJI SE MEĐUSOBNO ISKLJUČUJU

- ne mogu nastupiti istovremeno
- disjunktni događaji

U pokusu bacanja dva novčića sva četiri moguća ishoda se međusobno isključuju



PRAVILO ADICIJE
(za događaje koji se međusobno isključuju)

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ događaji koji se međusobno isključuju

A_1 **U** A_2 **U** ....**U** A_k složeni događaj, nastaje kada nastupi **ili** A_1 **ili** A_2 **ili..ili** A_k

$$\boxed{P(A_1 U A_2 U \ldots U A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)}$$

PRAVILO ADICIJE - primjer

U nekoj populaciji vjerojatnosti pojedinih krvnih grupa su:

P(O) = 0,42, P(A) = 0,43, P(B) = 0,11 i P(AB) = 0,04.

Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani pripadnik te populacije ima krvnu grupu A ili B?

P(A ili B) = 0.43 + 0.11 = 0.54

PRAVILO ADICIJE - primjer

Ako je vjerojatnost svijetle kose 0,20, vjerojatnost smeđe kose 0,40 a vjerojatnost crne kose 0,20, kolika je vjerojatnost da kosa bude:

a) smeđa ili crna

b) svijetla ili smeđa ili crna?

a) P(smeđa ili crna) = 0,40 + 0,20 = 0,60

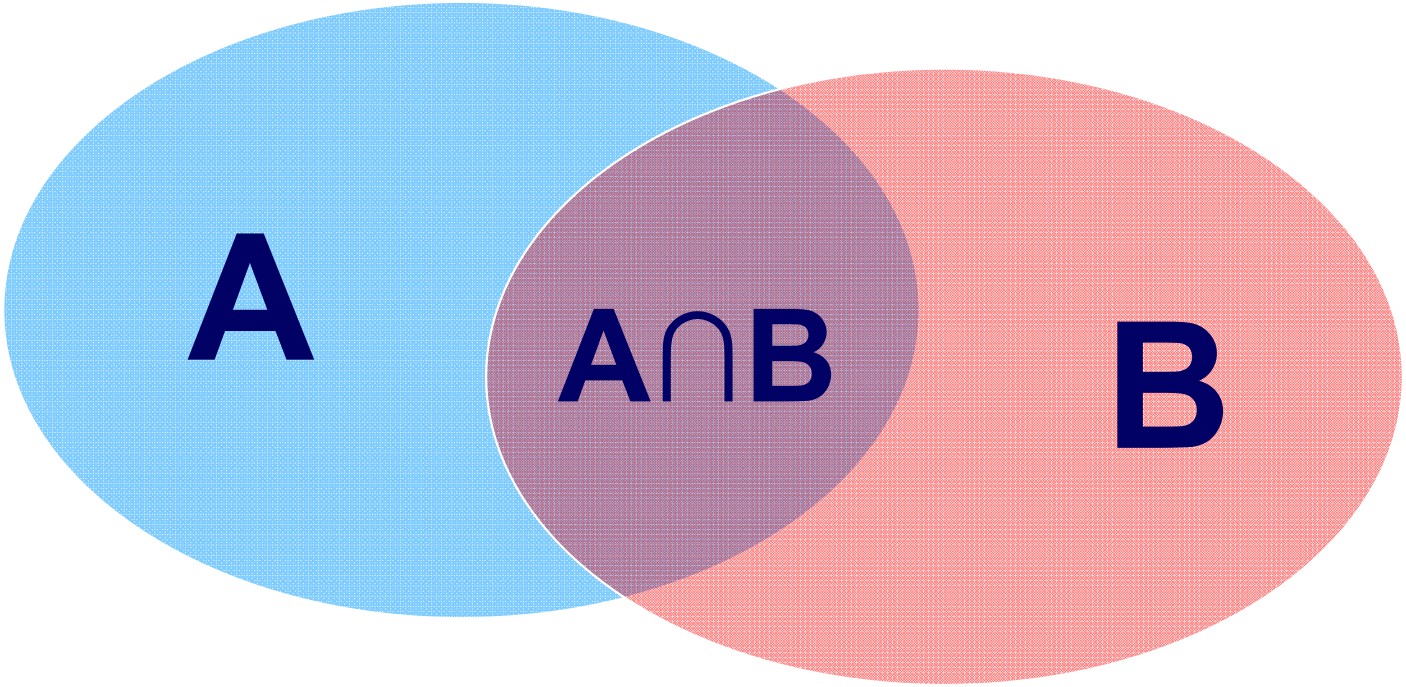
b) P(svijetla ili smeđa ili crna) = 0,20 + 0,40 + 0,20 = 0,80

NEZAVISNI DOGAĐAJI

- događaji koji mogu nastupiti istovremeno, pri čemu vjerojatnost nasupanja nekog od njih ne ovisi o realizaciji drugih

PRAVILO MULTIPLIKACIJE
(za nezavisne događaje)

A , B ...... nezavisni događaji



A ∩ B novi događaj koji nastupi kada se istovremeno realiziraju događaji A i B

PRAVILO MULTIPLIKACIJE
(za nezavisne događaje)

$A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ ... nezavisni događaji

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .... \cap A_k$ događaj koji nastupi kada se istovremeno realiziraju događaji $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .... \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot ... \cdot P(A_k)$$

PRAVILO MULTIPLIKACIJE - primjer

Ako je vjerojatnost svijetle kose 0,30, a vjerojatnost crnih očiju 0,20, kolika je vjerojatnost istovremenog pojavljivanja svijetle kose i crnih očiju?

$$P(\text{svijetla kosa i crne oči}) = 0{,}30 \cdot 0{,}20 = 0{,}06$$

primjer

Rezultati studije pokazali su da 60% majki djece do 10 godina radi puno radno vrijeme. Ako slučajno odaberemo tri majke, kolika je vjerojatnost da barem jedna od njih radi puno radno vrijeme?

$$
\begin{aligned}
P(\text{barem jedna radi PRV}) &= 1 - P(\text{niti jedna ne radi PRV}) = \\
&= 1 - [(0{,}4)(0{,}4)(0{,}4)] = \\
&= 1 - (0{,}4)^3 = 1 - 0{,}064 = \\
&= 0{,}936
\end{aligned}
$$

...općenito....

vjerojatnost da se u nizu od **m** pokusa događaj **A** pojavi BAREM jedan puta dana je sa:

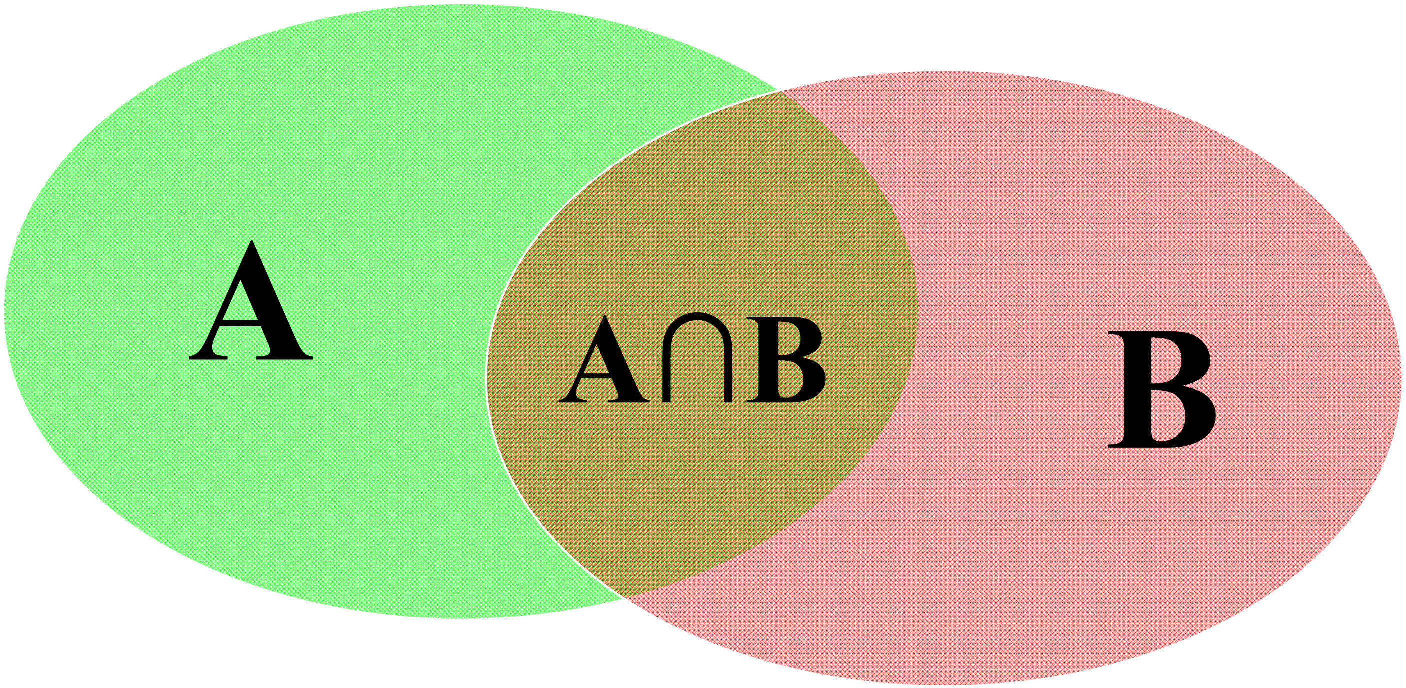
$$\boxed{\mathbf{P}(\text{barem jedan A}) = 1 - q^{\mathbf{m}}}$$

q.... vjerojatnost da se **A** NE DOGODI

q = 1 - P(A)

OPĆE PRAVILO ADICIJE

A , B ...... događaji koji mogu istovremeno nastupiti



$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

OPĆE PRAVILO ADICIJE - primjer

Od 150 studenata u domu 40 je imalo CD, 80 TV a 30 i CD i TV. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani student ima ili CD ili TV?

A ....student ima CD $P(A) = 40/150 = 0{,}2667$

B ....student ima TV $P(B) = 80/150 = 0{,}5333$

AiB ...student ima i CD i TV $P(A \cap B) = 30/150 = 0{,}2$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 0{,}2667 + 0{,}5333 - 0{,}2 =$$
$$= 0{,}6$$

UVJETNA VJEROJATNOST

- osnovna vjerojatnost u prirodnim i humanističkim istraživanjima
- ishodu nekog događaja prethodi neki drugi događaj kao uvjet za slijedeći potencijalni događaj

letalitet (stopa umrlih od neke bolesti) je tipična uvjetna vjerojatnost - mora biti zadovoljen uvjet da je osoba oboljela od te bolesti

UVJETNA VJEROJATNOST

A, B...događaji

vjerojatnost događaja B uz uvjet da se događaj A odigrao dana je sa:

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

UVJETNA VJEROJATNOST - primjer

Učestalost sljepoće za boje u ljudskoj populaciji različita je prema spolu (X-kromosomska nasljedna anomalija).

Učestalost (%)			
	Muškarci	Žene	Ukupno
Slijepi za boje	4,23	0,65	4,88
Normalni	48,48	46,64	95,12
Ukupno	52,21	47,29	100,00

UVJETNA VJEROJATNOST - primjer

Incidencija sljepoće za boje u muškoj subpopulaciji vodi na uvjetnu vjerojatnost

$$P(S \mid M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)}$$

$P(S \cap M)$

	Muškarci	Žene	Ukupno
Slijepi za boje	0,0423	0,0065	0,0488
Normalni	0,4848	0,4664	0,9512
Ukupno	0,5221	0,4729	1,0000

$P(M)$

OPĆE PRAVILO MULTIPLIKACIJE

neka su A, B događaji koji NISU nezavisni

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

A...preživljavanje kemoterapije ; P(A) = 0,9

B...izlječenje leukemije

B|A ....izlječenje leukemije pod uvjetom preživljavanja kemoterapije; P(B|A) = 0,8

Kolika je vjerojatnost da bolesnik preživi kemoterapiju i bude izliječen od leukemije?

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$$

OPĆE PRAVILO MULTIPLIKACIJE
primjer

Morbiditet od neke bolesti u populaciji je 0,10, a letalitet od te iste bolesti u istoj populaciji 0,08. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabran član te populacije oboli i umre?

$$P(A) = 0{,}10$$

$$P(B|A) = 0{,}08$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0{,}10 \cdot 0{,}08 = 0{,}008$$

NEZAVISNI DOGAĐAJI

događaji A i B su nezavisni ako vrijedi:

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$

ili

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

NEZAVISNI DOGAĐAJI

	Gluhoća		
	Postoji	Ne postoji	Ukupno
Slijepi za boje	0,0004	0,0796	0,0800
Normalni	0,0046	0,9154	0,9200
Ukupno	0,0050	0,9950	1,0000

$$P(G|S) = 0{,}0004/0{,}0800 = 0{,}0050$$

$$P(\overline{G}|S) = 0{,}0796/0{,}0800 = 0{,}9950$$

$P(G)$

$P(\overline{G})$

$$P(S \cap G) = P(S) \cdot P(G|S)$$

$$P(S \cap G) = P(S) \cdot P(G)$$

$$\mathbf{P(G|S) = P(G)}$$

....događaji su nezavisni