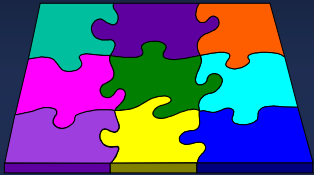


# ZADATCI ZA VJEŽBU



## VJEROJATNOST I RAZDIOBE VJEROJATNOSTI

vzad45

1

**ZADATAK 1.** U nekom gradu 30% stanovnika nosi naočale. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani stanovnik tog grada ne nosi naočale?

N ... nosi naočale  $P(N) = 0,3$

D ... ne nosi naočale

$P(D) = 1 - P(N) = 1 - 0,3 = 0,7$

Vjerojatnost da slučajno odabrani stanovnik toga grada ne nosi naočale je 0.7

vzad45

2

### ZADATAK 2:

U tablici je prikazan broj komplikacija u trudnoći prema godinama školovanja trudnica opažen na uzorku od 161 trudnice.

Školovanje (godine)	Broj komplikacija u trudnoći		
	$\geq 2$ (K2)	0-1 (K1)	Ukupno
1 - 3 (A)	22	53	75
4 - 8 (B)	9	23	32
9 - 10 (C)	10	27	37
11 i više (D)	5	12	17
Ukupno	46	115	161

- Kolika je vjerojatnost da će slučajno odabrana trudnica imati 2 i više komplikacija?
- Kolika je vjerojatnost da će slučajno odabrana trudnica imati 2 i više komplikacija i 4 do 8 godina školovanja?
- Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana trudnica ima 11 i više godina školovanja uz uvjet da ima manje od dvije komplikacije?
- Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana trudnica ima dvije i više komplikacija ili manje od 4 godine školovanja ili oboje?

vzad45

4

- Kolika je vjerojatnost da će slučajno odabrana trudnica imati 2 i više komplikacija?

Školovanje (godine)	Broj komplikacija u trudnoći		
	$\geq 2$ (K2)	0-1 (K1)	Ukupno
1 - 3 (A)	22	53	75
4 - 8 (B)	9	23	32
9 - 10 (C)	10	27	37
11 i više (D)	5	12	17
Ukupno	46	115	161

vzad45

5

- Kolika je vjerojatnost da će slučajno odabrana trudnica imati 2 i više komplikacija?

Školovanje (godine)	Broj komplikacija u trudnoći		
	$\geq 2$ (K2)	0-1 (K1)	Ukupno
1 - 3 (A)	22	53	75
4 - 8 (B)	9	23	32
9 - 10 (C)	10	27	37
11 i više (D)	5	12	17
Ukupno	46	115	161

$$P(K2) = \frac{46}{161} = 0.286$$

vzad45

6

- b) Kolika je vjerojatnost da će slučajno odabrana trudnica imati 2 i više komplikacija i 4 do 8 godina školovanja?

Školovanje (godine)	Broj komplikacija u trudnoći		
	≥ 2 (K2)	0-1 (K1)	Ukupno
1 - 3 (A)	22	53	75
4 - 8 (B)	9	23	32
9 - 10 (C)	10	27	37
11 i više (D)	5	12	17
Ukupno	46	115	161

- b) Kolika je vjerojatnost da će slučajno odabrana trudnica imati 2 i više komplikacija i 4 do 8 godina školovanja?

Školovanje (godine)	Broj komplikacija u trudnoći		
	≥ 2 (K2)	0-1 (K1)	Ukupno
1 - 3 (A)	22	53	75
4 - 8 (B)	9	23	32
9 - 10 (C)	10	27	37
11 i više (D)	5	12	17
Ukupno	46	115	161

$$P(K2 \cap B) = \frac{9}{161} = 0.056$$

- c) Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana trudnica ima 11 i više godina školovanja uz uvjet da ima manje od dvije komplikacije?

Školovanje (godine)	Broj komplikacija u trudnoći		
	≥ 2 (K2)	0-1 (K1)	Ukupno
1 - 3 (A)	22	53	75
4 - 8 (B)	9	23	32
9 - 10 (C)	10	27	37
11 i više (D)	5	12	17
Ukupno	46	115	161

- c) Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana trudnica ima 11 i više godina školovanja uz uvjet da ima manje od dvije komplikacije?

Školovanje (godine)	Broj komplikacija u trudnoći		
	≥ 2 (K2)	0-1 (K1)	Ukupno
1 - 3 (A)	22	53	75
4 - 8 (B)	9	23	32
9 - 10 (C)	10	27	37
11 i više (D)	5	12	17
Ukupno	46	115	161

$$P(D | K1) = \frac{P(D \cap K1)}{P(K1)} = \frac{12/161}{115/161} = \frac{12}{115} = 0.104$$

- d) Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana trudnica ima dvije i više komplikacija ili manje od 4 godine školovanja ili oboje?

Školovanje (godine)	Broj komplikacija u trudnoći		
	≥ 2 (K2)	0-1 (K1)	Ukupno
1 - 3 (A)	22	53	75
4 - 8 (B)	9	23	32
9 - 10 (C)	10	27	37
11 i više (D)	5	12	17
Ukupno	46	115	161

- d) Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana trudnica ima dvije i više komplikacija ili manje od 4 godine školovanja ili oboje?

Školovanje (godine)	Broj komplikacija u trudnoći		
	≥ 2 (K2)	0-1 (K1)	Ukupno
1 - 3 (A)	22	53	75
4 - 8 (B)	9	23	32
9 - 10 (C)	10	27	37
11 i više (D)	5	12	17
Ukupno	46	115	161

$$P(K2 \cup A) = P(K2) + P(A) - P(K2 \cap A) = \frac{46}{161} + \frac{75}{161} - \frac{22}{161} = \frac{99}{161} = 0.615$$

**ZADATAK 3:**

U generaciji od 100 učenika od kojih je 60 djevojčica i 40 dječaka, opaženo je da 24 djevojčice i 16 dječaka nosi naočale.

- Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani učenik/ca nosi naočale?
- Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani učenik/ca nosi naočale pod uvjetom da je dječak?
- Jesu li događaji "biti dječak" i nositi naočale nezavisni? Zašto?
- Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrani učenik/ca dječak i da nosi naočale?

vzad45

13

N ... nositi naočale

M ... biti dječak

- Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani učenik/ca nosi naočale?

$$P(N) = \frac{24+16}{100} = \frac{40}{100} = 0.4$$

vzad45

14

N ... nositi naočale

M ... biti dječak

- Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani učenik/ca nosi naočale pod uvjetom da je dječak?

$$P(N|M) = \frac{P(N \cap M)}{P(M)} = \frac{16/100}{40/100} = \frac{16}{40} = 0.4$$

vzad45

15

N ... nositi naočale

M ... biti dječak

- Jesu li događaji "biti dječak" i nositi naočale nezavisni? Zašto?

**Da, jer je**

$$P(N|M) = P(N)$$

vzad45

16

N ... nositi naočale

M ... biti dječak

- Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrani učenik/ca dječak i da nosi naočale?

$$P(N \cap M) = P(N) \cdot P(M) = \frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} = 0.16$$

vzad45

17

**ZADATAK 4.**

Vjerojatnost da će slučajno odabrana osoba iz neke populacije ispoljiti simptome određene bolesti je 0.20, a vjerojatnost da slučajno odabrana osoba iz dane populacije boluje od te bolesti je 0.23. Vjerojatnost da osoba koja ima simptome i boluje od te bolesti je 0.18.

Slučajno odabrana osoba iz dane populacije nema simptome; kolika je vjerojatnost da je bolesna?

vzad45

18

S ... ima simptome;  $P(S) = 0.20$       nonS ... nema simptome  
 B ... bolesna;  $P(B) = 0.23$       nonB ... nije bolesna  
 $P(S \cap B) = 0.18$

$P(B | \text{nonS}) = ?$

	S	nonS	Ukupno
B	0.18		0.23
nonB			
Ukupno	0.20		

S ... ima simptome;  $P(S) = 0.20$       nonS ... nema simptome  
 B ... bolesna;  $P(B) = 0.23$       nonB ... nije bolesna  
 $P(S \cap B) = 0.18$

$P(B | \text{nonS}) = ?$

	S	nonS	Ukupno
B	0.18		0.23
nonB			
Ukupno	0.20		1.00

S ... ima simptome;  $P(S) = 0.20$       nonS ... nema simptome  
 B ... bolesna;  $P(B) = 0.23$       nonB ... nije bolesna  
 $P(S \cap B) = 0.18$

$P(B | \text{nonS}) = ?$        $P(\text{nonS}) = 1 - P(S) = 0.80$   
 $P(\text{nonB}) = 1 - P(B) = 0.77$

	S	nonS	Ukupno
B	0.18		0.23
nonB			0.77
Ukupno	0.20	0.80	1.00

S ... ima simptome;  $P(S) = 0.20$       nonS ... nema simptome  
 B ... bolesna;  $P(B) = 0.23$       nonB ... nije bolesna  
 $P(S \cap B) = 0.18$

$P(B | \text{nonS}) = ?$        $P(\text{nonS}) = 1 - P(S) = 0.80$   
 $P(\text{nonB}) = 1 - P(B) = 0.77$

	S	nonS	Ukupno
B	0.18	0.05	0.23
nonB	0.02	0.75	0.77
Ukupno	0.20	0.80	1.00

S ... ima simptome;  $P(S) = 0.20$       nonS ... nema simptome  
 B ... bolesna;  $P(B) = 0.23$       nonB ... nije bolesna  
 $P(S \cap B) = 0.18$

$P(B | \text{nonS}) = ?$        $P(\text{nonS}) = 1 - P(S) = 0.80$   
 $P(\text{nonB}) = 1 - P(B) = 0.77$

	S	nonS	Ukupno
B	0.18	0.05	0.23
nonB	0.02	0.75	0.77
Ukupno	0.20	0.80	1.00

S ... ima simptome;  $P(S) = 0.20$       nonS ... nema simptome  
 B ... bolesna;  $P(B) = 0.23$       nonB ... nije bolesna  
 $P(S \cap B) = 0.18$

$P(B | \text{nonS}) = ?$        $P(\text{nonS}) = 1 - P(S) = 0.80$   
 $P(\text{nonB}) = 1 - P(B) = 0.77$

	S	nonS	Ukupno
B	0.18	0.05	0.23
nonB	0.02	0.75	0.77
Ukupno	0.20	0.80	1.00

$$P(B | \text{nonS}) = \frac{P(B \cap \text{nonS})}{P(\text{nonS})} = \frac{0.05}{0.80} = 0.0625$$

**ZADATAK 5.**

U populaciji odraslih osoba proporcija pušača je 26%. Kolika je vjerojatnost da će u slučajnom uzorku od 20 odraslih biti:

- a) tri pušača,
- b) manje od tri pušača,
- c) tri i više pušača?

vzad45

25

$$n = 20$$

$$p = 0.26 \quad q = 0.74$$

$$a) P_a = P(x=3) = ?$$

$$P_a = P(3) = \binom{20}{3} \cdot p^3 \cdot q^{17} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot p^3 \cdot q^{17} = 1140 \cdot 0.26^3 \cdot 0.74^{17} = 0.1199$$

vzad45

$$n = 20 \quad p = 0.26 \quad q = 0.74$$

$$b) P_b = P(x < 3) = ?$$

$$P_b = P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$$

$$P(0) = \binom{20}{0} p^0 q^{20} = 0.74^{20} = 0.0024$$

$$P(1) = \binom{20}{1} p^1 q^{19} = 20 \cdot 0.26 \cdot 0.74^{19} = 0.0170$$

$$P(2) = \binom{20}{2} p^2 q^{18} = 190 \cdot 0.26^2 \cdot 0.74^{18} = 0.0569$$

$$P_b = P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0.0763$$

$$n = 20 \quad p = 0.26 \quad q = 0.74$$

$$c) P_c = P(x \geq 3) = ?$$

$$P_c = P(x \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P_b$$

$$P_c = 1 - P_b = 1 - 0.0763 = 0.9237$$

**ZADATAK 6.**

U nekoj populaciji mjesečno se dijagnosticira u prosjeku 5 novih slučajeva karcinoma. Ako mjesečna incidencija karcinoma u toj populaciji slijedi Poissonovu raspodjelu, kolika je vjerojatnost da u danom mjesecu bude dijagnosticirano:

- a) 7 novih slučajeva
- b) niti jedan novi slučaj?

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad \mu = 5$$

$$a) P(7) = \frac{5^7 e^{-5}}{7!} = \frac{78125 \cdot 0.0067}{5040} = 0.1039$$

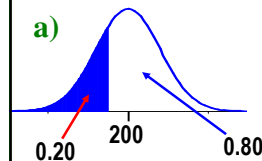
$$b) P(0) = e^{-\mu} = e^{-5} = 0.0067$$

### ZADATAK 7.

Ukupne vrijednosti kolesterola u danoj populaciji su normalno raspodijeljene s aritmetičkom sredinom od 200 mg/100 ml i standardnom devijacijom od 20 mg/ 100 ml.

- a) Koja je vrijednost kolesterola od koje 80% članova promatrane populacije ima veću vrijednost kolesterola?
- b) Koji postotak populacije ima vrijednost kolesterola manju od 170 mg/100ml?

$$\bar{x} = 200; \quad s = 20 \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$



$$P(z_x) = 0.20$$

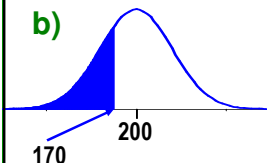
$$z_x = -0.84$$

$$x = z_x \cdot s + \bar{x}$$

$$x = -0.84 \cdot 20 + 200 = 183.2$$

80% članova populacije ima vrijednost kolesterola veću od 183.2mg/100ml.

$$\bar{x} = 200; \quad s = 20 \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$



$$x = 170$$

$$z = \frac{170 - 200}{20} = -1.5$$

$$P(z_{-1.5}) = P(z_{1.5}) = 0.0668$$

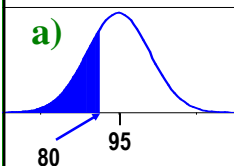
6.7% članova populacije ima vrijednost kolesterola manju od 170mg/100ml.

### ZADATAK 8.

Prosječna vrijednost hemoglobina u u skupini od 700 dječaka je 95 g%, a standardna devijacija 9g%. Uz pretpostavku normalne razdiobe, procijenite koliko dječaka ima hemoglobin:

- a) manji od 80
- b) veći od 115
- c) između 70 i 110?

$$\bar{x} = 95; \quad s = 9 \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$



$$x = 80$$

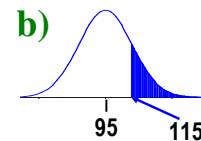
$$z = \frac{80 - 95}{9} = -1.67$$

$$P(z_{-1.67}) = P(z_{1.67}) = 0.0475$$

$$700 \cdot 0.0475 = 33.25$$

33 dječaka imaju hemoglobin manji od 80g%.

$$\bar{x} = 95; \quad s = 9 \quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$



$$x = 115$$

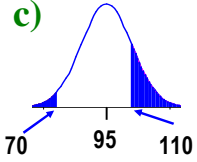
$$z = \frac{115 - 95}{9} = 2.22$$

$$P(z_{2.22}) = 0.0132$$

$$700 \cdot 0.0132 = 9.24$$

9 dječaka ima hemoglobin veći od 115g%.

$\bar{x} = 95; s = 9$        $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

c) 

$x_1 = 70$	$x_2 = 110$
$z_1 = \frac{70 - 95}{9}$	$z_2 = \frac{110 - 95}{9}$
$z_1 = -2.78$	$z_2 = 1.67$

$P_c = 1 - [P(z_1) + P(z_2)] = 1 - (0.0027 + 0.0475)$   
 $P_c = 1 - 0.0502 = 0.9498$   
 $700 \cdot 0.9498 = 664.86$

664 dječaka ima hemoglobin između 70 i 110 g%.