

# RASPODJELE VJEROJATNOSTI

IST - P5

1

## SLUČAJNA VARIJABLA

- pravilo po kojem se pojedinim slučajnim događajima dodjeljuju brojevi (atributi) tako da je uz svaki od njih pridružena određena vjerojatnost

Npr. varijabla broj infekcija može poprimiti vrijednosti 0, 1, 2, ...

Zovemo ju slučajnom ako je svakoj od vrijednosti pridružena određena vjerojatnost (npr. vjerojatnost da netko ima dvije infekcije u nekoj skupini ljudi je 0,07)

IST - P5

2

## DISKRETNA SLUČAJNA VARIJABLA (definicija)

Diskretna slučajna varijabla je varijabla  $X$  koja poprima niz vrijednosti

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

ali svaku od njih s određenom vjerojatnošću

$$p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_k), \quad p(x_i) \geq 0, \forall i$$

pri čemu za vjerojatnosti  $p(x_i)$  vrijedi

$$\sum_{i=1}^k p(x_i) = 1$$

IST - P5

3

## RASPODJELA slučajne varijable $X$

skup svih parova  $\{x_i, p(x_i)\}$ ,  $i=1,2,\dots$

## FUNKCIJA VJEROJATNOSTI slučajne varijable $X$

zakon  $p(x)$  po kojem svakoj vrijednosti  $x_i$  pripada vjerojatnost  $p(x_i)$

## FUNKCIJA RASPODJELE slučajne varijable $X$

$$F(x_0) = \sum_{x_i \leq x_0} p(x_i)$$

- pokazuje kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla  $X$  poprimi bilo koju vrijednost manju ili jednaku  $x_0$  tj.

$$F(x_0) = P\{x \leq x_0\}$$

IST - P5

4

## PRIMJER:

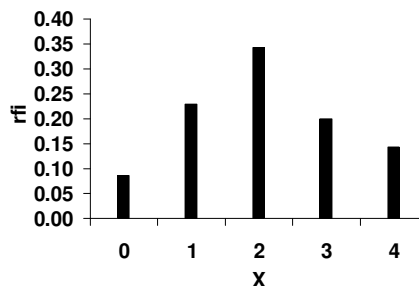
Na 35 preparata nekog biološkog materijala mjereno je broj nezrelih stanica. Dobiveni su sljedeći rezultati:

$X_i$	$f_i$	$rf_i$	$crf_i$
0	3	0.09 = $p(x_0)$	0.09 = $F(x_0) = p(x_0)$
1	8	0.23 = $p(x_1)$	0.32 = $F(x_1) = p(x_0) + p(x_1)$
2	12	0.34 = $p(x_2)$	0.66 = $F(x_2) = p(x_0) + p(x_1) + p(x_2)$
3	7	0.20 = $p(x_3)$	0.86 :
4	5	0.14 = $p(x_4)$	1.00 :
	35	1.00	

$rf_i$  ... vjerojatnost da je broj nezrelih stanica jednak  $X_i$  -  $p(x_i)$

$crf_i$  ... vjerojatnost da je broj nezrelih stanica manji ili jednak  $X_i$  -  $F(x_i)$

## raspodjela vjerojatnosti



IST - P5

6

## KONTINUIRANA SLUČAJNA VARIJABLA

- **područje vrijednosti** kontinuirane slučajne varijable je interval na brojevnom pravcu (moguće i čitav brojevni pravac)
- vjerojatnost pridružujemo intervalima brojevnog pravca
- pojedinačnim vrijednostima  $x_i$  pripada vjerojatnost 0
- nekom intervalu  $(x_1, x_2)$  pridružujemo vjerojatnost  $P\{x_1 < x < x_2\}$  po **funkciji vjerojatnosti  $f(x)$**

IST - P5

7

## (definicija)

Funkcija vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable  $X$  je funkcija  $f(x)$  koja ima slijedeća svojstva:

$$1. f(x) \geq 0, \forall x$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$3. \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = P\{x_1 < x < x_2\}$$

pri čemu su  $x_1, x_2$  bilo koje dvije vrijednosti varijable  $x$  takve da je  $x_1 < x_2$

IST - P5

8

## značenje svojstava funkcije vjerojatnosti:

- **1. svojstvo** - NENEGATIVNOST (vjerojatnost ne može biti negativan broj)
- **2. svojstvo** - VJEROJATNOST SIGURNOG DOGAĐAJA je 1
  - ako je područje vrijednosti slučajne varijable  $X$  interval  $(a,b)$ , onda 2. svojstvo poprima oblik

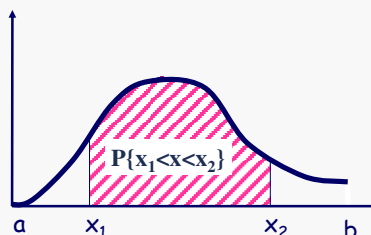
$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

i uzimamo da je  $f(x)=0$  za sve vrijednosti  $x$  izvan područja vrijednosti, tj. intervala  $(a,b)$

IST - P5

9

- 3. svojstvo -  $P\{x_1 < x < x_2\}$  je numerički jednaka površini ispod krivulje vjerojatnosti nad intervalom  $(x_1, x_2)$



IST - P5

10

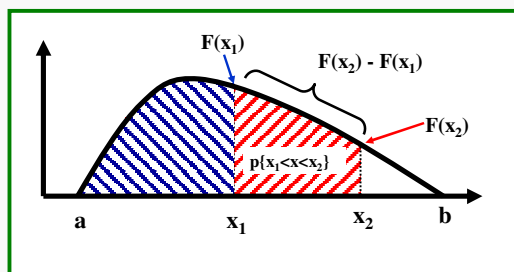
## FUNKCIJA RASPODJELE kontinuirane slučajne varijable

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx = P\{x \leq x_0\}$$

- pokazuje kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla  $X$  poprimi bilo koju vrijednost manju ili jednaku  $x_0$

IST - P5

11



IST - P5

12

## KARAKTERISTIČNE VRIJEDNOSTI SLUČAJNIH VARIJABLI

IST - P5

13

## OČEKIVANJE (sredina) SLUČAJNE VARIJABLE

$$E(x) = \mu = \sum_i x_i p(x_i)$$

očekivanje diskretne slučajne varijable

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

očekivanje kontinuirane slučajne varijable

- kod empirijske raspodjele frekvencija to je aritmetička sredina:

$$\mu = \frac{\sum_i x_{i0}}{N} = \frac{\sum_i f_i x_i}{N} = \sum_i f_{ri} x_i$$

IST - P5

14

## VARIJANCA (disperzija) SLUČAJNE VARIJABLE

$$V(x) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

varijanca diskretne slučajne varijable

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

varijanca kontinuirane slučajne varijable

- kod empirijske raspodjele frekvencija:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_{i0} - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_i f_i (x_i - \mu)^2}{N} = \sum_i f_{ri} (x_i - \mu)^2$$

IST - P5

15

## TEORIJSKE RASPODJELE

IST - P5

16

## BINOMNA RASPODJELA $X \sim B(n, p)$

- $(p+q)^n$

### BERNOULLIJEV DOGAĐAJ

- događaj A čija se vjerojatnost nastupanja  $P(A) = p$  ne mijenja tijekom pokusa, a vjerojatnost NE nastupanja događaja A je  $q = 1 - p$

npr. u pokusu bacanja novčića pri svakom bacanju novčića vjerojatnost pojave "grba" je  $p = 0,5$

IST - P5

17

- vjerojatnost da Bernoullijev događaj A u nizu od n pokusa nastupi x puta:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

BERNOULLIJEVA FORMULA

gdje je  $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$  BINOMNI KOEFICIJENT

### BINOMNA RASPODJELA

- skup svih parova  $\{x, P(x)\}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots, n$

IST - P5

18

## Primjer rekombinacije gena:

Vjerojatnost pojave gena A je  $p(A)=p$ , a vjerojatnost pojave gena a je  $p(a)=q$ . Koje su vjerojatnosti mogućih genotipova?

Mogu nastupiti kombinacije: AA, Aa, aA, aa. Aa i aA se ne mogu biološki razlikovati => prostor ishoda je  $\{AA, Aa, aa\}$

$$P(AA) = \binom{2}{2} p^2 q^{2-2} = p^2$$

$$P(Aa) = \binom{2}{1} p^1 q^{2-1} = 2pq$$

$$P(aa) = \binom{2}{0} p^0 q^{2-0} = q^2$$

IST - P5

19

## KARAKTERISTIKE BINOMNE RASPODJELE

- jednoznačno je određena parametrima  $n, p$

$$E(x) = np \quad \text{OČEKIVANJE}$$

$$\sigma^2 = V(x) = npq \quad \text{VARIJANCA}$$

IST - P5

20

## KARAKTERISTIKE BINOMNE RASPODJELE

### KOEFICIJENT ASIMETRIJE

$$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

### KOEFICIJENT SPLJOSTENOSTI

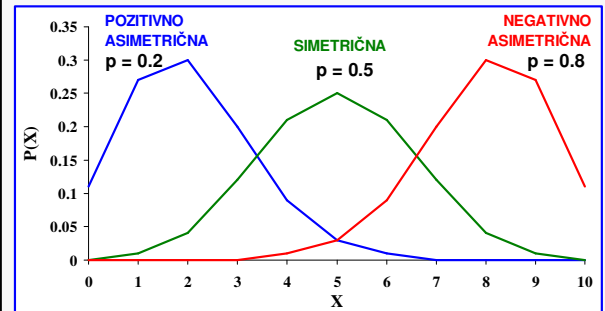
$$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$$

- SIMETRIČNA za  $p = q = 1/2$
- POZITIVNO ASIMETRIČNA ako je  $q > p$ , tj.  $q > 1/2$
- NEGATIVNO ASIMETRIČNA ako je  $q < p$ , tj.  $q < 1/2$

IST - P5

21

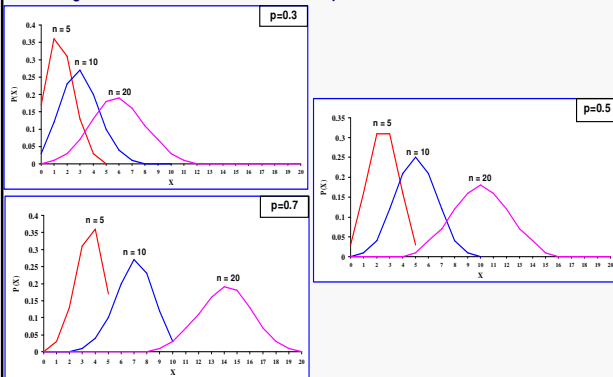
## BINOMNA RASPODJELA ZA RAZLIČITE PARAMETRE p



IST - P5

22

- bez obzira na međusobni odnos parametara p i q, vrijedi:  
 $\alpha_3 \rightarrow 0$  kada  $n \rightarrow \infty$ ;  $\alpha_4 \rightarrow 3$  kada  $n \rightarrow \infty$



IST - P5

23

## PRIMJENA BINOMNE RASPODJELE ZA PROCJENU VJEROJATNOSTI SMRTNOG ISHODA

Ako je letalitet od neke bolesti  $p=0,30$  a vjerojatnost preživljavanja  $q=0,70$  pitanje vjerojatnosti smrtnog ishoda i preživljavanja za 5 bolesnika možemo prikazati kao binomnu raspodjelu ( $n=5$ ;  $p=0,30$ )

IST - P5

24

**PRIMJENA BINOMNE RASPODJELE ZA PROCJENU VJEROJATNOSTI SMRTNOG ISHODA**

BROJ UMRLIH	VJEROJATNOST	
0	$P(0) = \binom{5}{0} p^0 q^5 = q^5$	=0.16807
1	$P(1) = \binom{5}{1} p^1 q^4 = 5pq^4$	=0.36015
2	$P(2) = \binom{5}{2} p^2 q^3 = 10p^2q^3$	=0.30870
3	$P(3) = \binom{5}{3} p^3 q^2 = 10p^3q^2$	=0.13230
4	$P(4) = \binom{5}{4} p^4 q^1 = 5p^4q$	=0.02835
5	$P(5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 = p^5$	= 0.00243

IST - P5

25

**PRILAGOĐAVANJE BINOMNE RASPODJELE EMPIRIJSKIM PODACIMA**

Pokus: 1000 bacanja 7 novčića. Kolike su očekivane frekvencije pojavljivanja grba uz pretpostavku da su novčići ispravni?

Znamo:

- novčići su ispravni =>  $p = 0.5, q = 0.5$
- u svakom je bacanju 7 novčića =>  $n = 7$
- vjerojatnost pojave X grbova dana je sa

$$P(x) = \binom{7}{x} p^x q^{7-x} = \binom{7}{x} 0.5^x 0.5^{7-x} = \binom{7}{x} 0.5^7$$

IST - P5

26

x	P(x)	P(x)*N	f <sub>ex</sub>
0	$\binom{7}{0} 0.5^7 = 0.5^7$	7.81	8
1	$\binom{7}{1} 0.5^7 = 7 \cdot 0.5^7$	54.69	55
2	$\binom{7}{2} 0.5^7 = 21 \cdot 0.5^7$	164.06	164
3	$\binom{7}{3} 0.5^7 = 35 \cdot 0.5^7$	273.44	273
4	$\binom{7}{4} 0.5^7 = 35 \cdot 0.5^7$	273.44	273
5	$\binom{7}{5} 0.5^7 = 21 \cdot 0.5^7$	164.06	164
6	$\binom{7}{6} 0.5^7 = 7 \cdot 0.5^7$	54.69	55
7	$\binom{7}{7} 0.5^7 = 0.5^7$	7.81	8

IST - P5

27

**POISSONOVA RASPODJELA**

- granični prijelaz binomne raspodjele kada  $n \rightarrow \infty$  uz uvjet  $n \cdot p = \text{const}$ .

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad P(0) = e^{-\mu}$$

funkcija vjerojatnosti Poissonove raspodjele

gdje je  $\mu = n \cdot p$ ;  $e$  ... baza prirodnog logaritma ( $e \approx 2.72$ )

IST - P5

28

**KARAKTERISTIKE POISSONOVE RASPODJELE**

- jednoznačno je određena parametrom  $\mu$

$$E(x) = \mu$$

OČEKIVANJE

$$\sigma^2 = V(x) = \mu$$

VARIJANCA

IST - P5

29

**KARAKTERISTIKE POISSONOVE RASPODJELE**

KOEFICIJENT ASIMETRIJE

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

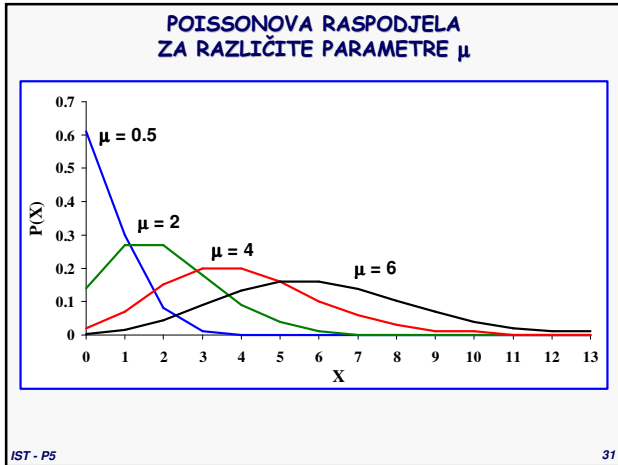
KOEFICIJENT SPLJOSTENOSTI

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1}{\mu}$$

- $\alpha_3 > 0, \forall \mu$  (pozitivna asimetrija)
- povećanjem parametra  $\mu$  asimetrija se smanjuje

IST - P5

30



### POISSONOVA RASPODJELA

- opisuje slučajnu raspodjelu događaja u vremenu ili sitnih čestica u prostoru
- raspodjela "rijetkih događaja"

IST - P5 32

**PRIMJER:** U promatranjima Rutherforda i Geigera ustanovljeno je da jedan radioaktivan izvor emitira u prosjeku 3.87  $\alpha$  čestica u vremenskom intervalu od 7.5 sekundi. Kolika je vjerojatnost da je u jednoj sekundi emitirana:

a) najviše 1 čestica?  
b) najmanje 1 čestica?

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad P(0) = e^{-\mu} \quad \mu = \frac{3.87}{7.5} = 0.516$$

a)  $P(x \leq 1) = P(0) + P(1)$   
 $P(0) = e^{-\mu} = e^{-0.516} = 0.5969$   
 $P(1) = \frac{0.516^1 e^{-0.516}}{1!} = 0.516 \cdot 0.5969 = 0.3080$   
 $P(x \leq 1) = P(0) + P(1) = 0.5969 + 0.3080 = 0.9049$

b)  $P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(0) = 1 - 0.5969 = 0.4031$

IST - P5 33

### Aproksimacija binomne razdiobe Poissonovom

• u slučajevima kad je  $n \cdot p \leq 10$  uz  $n > 50$

**PRIMJER:** U seriji automatski očitanih nalaza KKS prosječno je 1% pogrešnih.

a) Kolika je vjerojatnost da od 200 nalaza ne bude niti jedan pogrešan?  
b) Kolika je vjerojatnost da će u 300 nalaza biti najviše 1 pogrešan?

a)  $p=0.01$ ,  $n=200$ ,  $\mu=n \cdot p=2$   
 $P(0) = e^{-\mu} = e^{-2} = 0.1353$

b)  $p=0.01$ ,  $n=300$ ,  $\mu=n \cdot p=3$   
 $P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$ ,  $P = P(x \leq 1) = P(0) + P(1)$   
 $P(0) = e^{-\mu} = e^{-3} = 0.0498$   
 $P(1) = \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = 3 \cdot e^{-3} = 3 \cdot 0.0498 = 0.1494$   
 $P = P(x \leq 1) = P(0) + P(1) = 0.0498 + 0.1494 = 0.1992$

### PRILAGOĐAVANJE POISSONOVE RASPODJELE EMPIRIJSKIM PODACIMA

Na 576 ploča hranjivih podloga prebrojane su bakterije i dobiveno je sljedeće:

- na 229 pločica nije nađena niti jedna bakterija
- na 211 pločica nađena je 1 bakterija
- na 93 pločice nađene su 2 bakterije
- na 35 pločica nađene su 3 bakterije
- na 7 pločica nađene su 4 bakterije
- na jednoj pločici nađeno je 7 bakterija.

Odgovara li rast bakterija Poissonovoj raspodjeli?

IST - P5 35

**vrijedi:**  $\frac{p(x)}{p(x-1)} = \frac{\mu}{x} \Rightarrow p(x) = \frac{\mu}{x} p(x-1)$

x	$f_x$	$x \cdot f_x$	$\mu/x$	p(x)	$f_{ex} = N \cdot p(x)$	$f_{ex}$
0	229	0	-	0.39365	226.74	227
1	211	211	0.9323	0.36700	211.39	211
2	93	186	0.4662	0.17108	98.54	99
3	35	105	0.3108	0.05317	30.63	31
4	7	28	0.2331	0.01239	7.14	7
5	0	0	0.1865	0.00231	1.33	1
6	0	0	0.1554	0.00036	0.21	0
7	1	7	0.1332	0.00005	0.03	0
	576	537				576

$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_{xi} = \frac{537}{576} = 0.9323$ ;  $P(0) = e^{-\mu} = e^{-0.9323} = 0.3936$

IST - P5 36

**NORMALNA RASPODJELA  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$**  .... svojstva ....

- slučajna varijabla  $X$  ima normalnu raspodjelu ako je područje njenih vrijednosti  $\langle -\infty, +\infty \rangle$ , a funkcija vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$$

**FUNKCIJA VJEROJATNOSTI NORMALNE RASPODJELE**

IST - P5 37

**NORMALNA RASPODJELA  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$**  .... svojstva ....

**OČEKIVANJE**  $E(X) = \mu = a$

**VARIJANCA**  $V(X) = \sigma^2 = b^2$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

**FUNKCIJA VJEROJATNOST I NORMALNE RASPODJELE**

- jednoznačno je određena parametrima  $\mu, \sigma^2$

IST - P5 38

**NORMALNA RASPODJELA  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$**  .... svojstva ....

**koeficijent asimetrije**  $\alpha_3 = 0$

- simetrična s obzirom na pravac  $x = \mu$

**koeficijent spljoštenosti**  $\alpha_4 = 3$

IST - P5 39

**NORMALNA RASPODJELA  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$**  .... svojstva ....

**TOČKE INFLEKSIJE**

$\mu - \sigma$     $\mu$     $\mu + \sigma$

IST - P5 40

**NORMALNA RASPODJELA  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$**  .... svojstva ....

$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3, \sigma = \text{const.}$

$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3, \mu = \text{const.}$

IST - P5 41

**NORMALNA RASPODJELA  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$**  .... svojstva ....

**1.  $\mu = \text{Me} = \text{Mo}$**

**2.**

$\mu - 3\sigma$     $\mu - 2\sigma$     $\mu - \sigma$     $\mu$     $\mu + \sigma$     $\mu + 2\sigma$     $\mu + 3\sigma$

IST - P5 42

NORMALNA RASPODJELA  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  .... svojstva ....



3. Površina ispod krivulje normalne raspodjele u intervalu između dvije vrijednosti koje su definirane udaljenošću od aritmetičke sredine izražene u standardnim devijacijama je **KONSTANTNA** bez obzira na stvarne vrijednosti aritmetičke sredine i standardne devijacije u pojedinom slučaju

<p>Npr:</p> <p>a)</p> <p><math>x_1 = 2.5</math></p> <p><math>x_2 = 3.5</math></p> <p><math>\mu = 3</math></p> <p><math>\sigma = 0.5</math></p> <p><math>P(x_1 &lt; X &lt; x_2) = ?</math></p> <p><math>x_1 = 2.5 = \mu - \sigma</math></p> <p><math>x_2 = 3.5 = \mu + \sigma</math></p> <p><math>P(x_1 &lt; X &lt; x_2) = P(\mu - \sigma &lt; X &lt; \mu + \sigma) = 0.68</math></p>	<p>b)</p> <p><math>x_1 = 10</math></p> <p><math>x_2 = 14</math></p> <p><math>\mu = 12</math></p> <p><math>\sigma = 2</math></p> <p><math>P(x_1 &lt; X &lt; x_2) = ?</math></p> <p><math>x_1 = 10 = \mu - \sigma</math></p> <p><math>x_2 = 14 = \mu + \sigma</math></p> <p><math>P(x_1 &lt; X &lt; x_2) = P(\mu - \sigma &lt; X &lt; \mu + \sigma) = 0.68</math></p>
<p><math>z = \frac{x - \mu}{\sigma}</math></p> <p><math>z_{a1} = \frac{x_{a1} - \mu_a}{\sigma_a} = \frac{2.5 - 3}{0.5} = -1</math></p> <p><math>z_{a2} = \frac{x_{a2} - \mu_a}{\sigma_a} = \frac{3.5 - 3}{0.5} = 1</math></p>	<p><math>z = \frac{x - \mu}{\sigma}</math></p> <p><math>z_{b1} = \frac{x_{b1} - \mu_b}{\sigma_b} = \frac{10 - 12}{2} = -1</math></p> <p><math>z_{b2} = \frac{x_{b2} - \mu_b}{\sigma_b} = \frac{14 - 12}{2} = 1</math></p>

$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$  STANDARDIZIRANA VRIJEDNOST (standardized deviate, z-value)

- supstitucijom u funkciju vjerojatnosti normalne raspodjele dobivamo:

$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$

funkcija od z

STANDARDNA (jedinična) NORMALNA RASPODJELA  $X \sim N(0, 1)$

$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$  FUNKCIJA VJEROJATNOSTI STANDARDNE NORMALNE RASPODJELE

$f(x) = \frac{1}{\sigma} \phi(z)$

ŌČEKIVANJE  $E(z) = 0$

VARIJANCA  $V(z) = 1$

$X \sim N(0, 1)$

PRETVARANJE LJESTVICE MJERENJA U STANDARDIZIRANU Z-LJESTVICU

ljestvica mjerenja

z - ljestvica

TABLICA PVRŠINA ISPOD STANDARDNE NORMALNE RASPODJELE

• Tablica sadrži vrijednosti površina samo za nenegativne z vrijednosti ( $z \geq 0$ ) i to iznad intervala  $\langle z, +\infty \rangle$ .

• Za odgovarajuće negativne z vrijednosti površina je jednaka, tj.  $P - z = P(-\infty < X < -z) = P(z < X < +\infty) = P + z$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2911	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2481	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2267	0.2237	0.2207	0.2178	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1921	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1447	0.1425	0.1403	0.1382
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1250	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1074	0.1055	0.1036	0.1017	0.0998	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681

površina ispod krivulje funkcije vjerojatnosti standardne normalne raspodjele iznad intervala  $\langle z, +\infty \rangle$ , za  $z=0.44$



Na velikom uzorku izmjerena je visina desetogodišnjih dječaka. Aritmetička sredina visine bila je 137cm, a standardna devijacija 5cm. Kolika je visina od koje je 20% dječaka višlje?

$P(z)=0.20$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611

$z=0.84$

iz 
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma \cdot z + \mu = 5\text{cm} \cdot 0.84 + 137\text{cm} = 141.2\text{cm}$$

Koliki postotak dječaka ima visinu:

- a) do 126cm
- b) između 126cm i 134cm
- c) između 134cm i 144cm
- d) iznad 144cm
- e) do 144cm?

a)  $z_{126} = \frac{126-137}{5} = -2.2 \quad P(z_{126}) = P_a = 0.0139 \Rightarrow 1.39\%$

b)  $z_{134} = \frac{134-137}{5} = -0.6 \quad P(z_{134}) = 0.2743$   
 $P_b = P(z_{134}) - P(z_{126}) = 0.2604 \Rightarrow 26.04\%$

c)  $z_{144} = \frac{144-137}{5} = 1.4 \quad P(z_{144}) = 0.0808$   
 $P_c = 1 - [P(z_{134}) + P(z_{144})] = 1 - (0.2743 + 0.0808) = 0.6449 \Rightarrow 64.49\%$

d)  $P_d = P(z_{144}) = 0.0808 \Rightarrow 8.08\%$

e)  $P_e = 1 - P_d = 1 - P(z_{144}) = 1 - 0.0808 = 0.9192 \Rightarrow 91.92\%$

IST - P5

50