RASPODJELE VJEROJATNOSTI

SLUČAJNA VARIJABLA

- pravilo po kojem se pojedinim slučajnim događajima dodjeljuju brojevi (atributi) tako da je uz svaki od njih pridružena određena vjerojatnost

Npr. varijabla **sistolički tlak** može poprimiti vrijednosti 140mmHg, 180mmHg, 200mmHg, ...

Zovemo ju **slučajnom** ako je svakom od intervala vrijednosti pridružena određena vjerojatnost (npr. vjerojatnost sistoličkog krvnog tlaka od 140mmHg do 160mmHg u nekoj skupini ljudi je 0,07)

DISKRETNA SLUČAJNA VARIJABLA (definicija)

Diskretna slučajna varijabla je varijabla X koja poprima niz vrijednosti

$$x_1, x_2, ..., x_k$$

ali svaku od njih s određenom vjerojatnošću

$$p(x_1), p(x_2), ..., p(x_k), \quad p(x_i) \geq 0, \forall i$$

pri čemu za vjerojatnosti $p(x_i)$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} p(x_i) = 1$$

RASPODJELA slučajne varijable X

skup svih parova $\{ x_i, p(x_i) \}$, $i=1,2,\ldots$

FUNKCIJA VJEROJATNOSTI slučajne varijable X

zakon $p(x)$ po kojem svakoj vrijednosti x_i pripada vjerojatnost $p(x_i)$

FUNKCIJA RASPODJELE slučajne varijable X

$$\boxed{F(x_0) = \sum_{x_i \le x_0} p(x_i)}$$

- pokazuje kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi bilo koju vrijednost manju ili jednaku x_0 tj.

$$F(x_0) = P\{x \le x_0\}$$

PRIMJER:

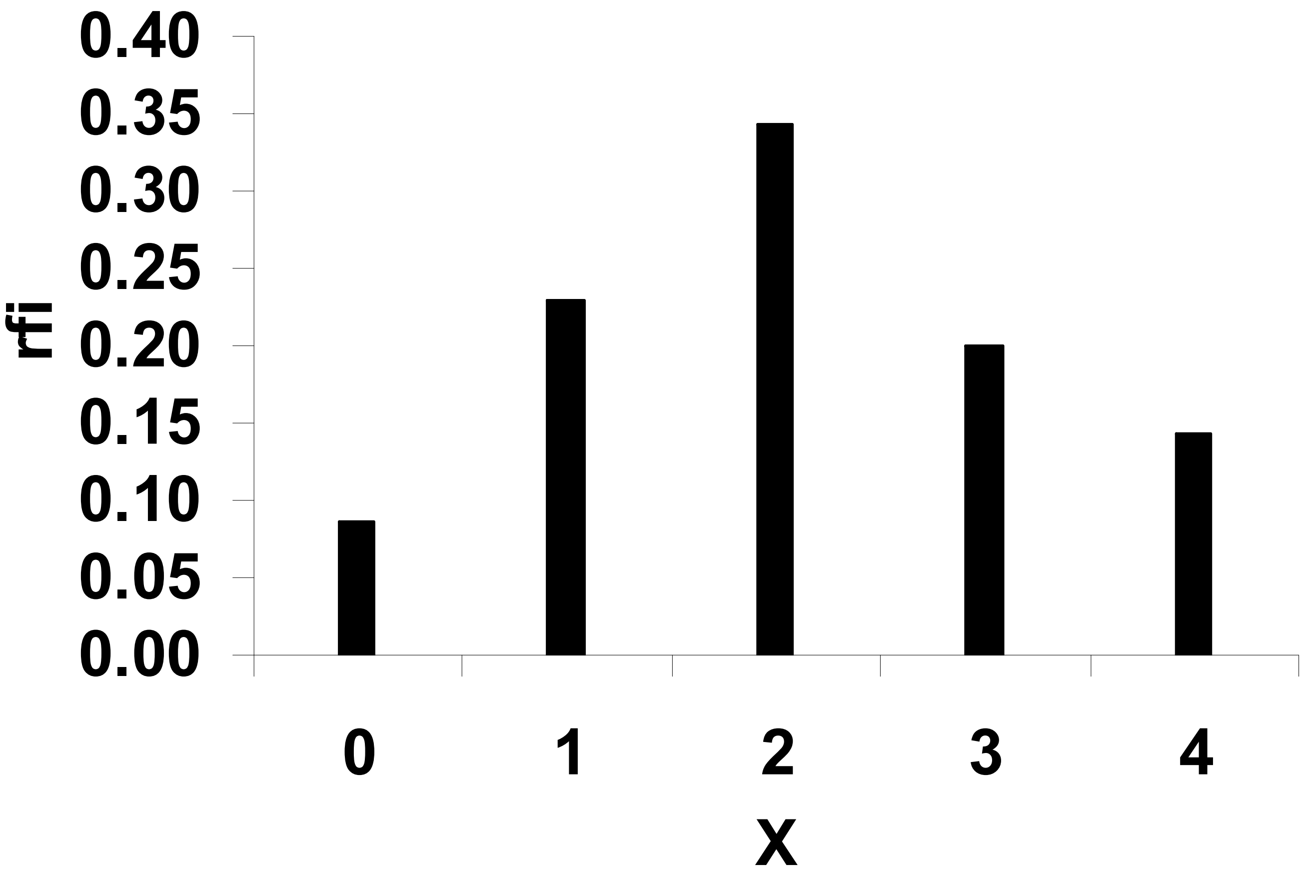
Na 35 preparata nekog biološkog materijala mjeren je broj nezrelih stanica. Dobiveni su slijedeći rezultati:

X_i	f_i	rf_i	crf_i
0	3	0.09 $=p(x_0)$	0.09 $= F(x_0)=p(x_0)$
1	8	0.23 $=p(x_1)$	0.32 $= F(x_1)=p(x_0)+p(x_1)$
2	12	0.34 $=p(x_2)$	0.66 $= F(x_2)=p(x_0)+p(x_1)+p(x_2)$
3	7	0.20 $=p(x_3)$	0.86 :
4	5	0.14 $=p(x_4)$	1.00 :
	35	1.00	

rf_i .... vjerojatnost da je broj nezrelih stanica jednak X_i - $\mathbf{p(x_i)}$

crf_i ... vjerojatnost da je broj nezrelih stanica manji ili jednak X_i - $\mathbf{F(x_i)}$

raspodjela vjerojatnosti



KONTINUIRANA SLUČAJNA VARIJABLA

- **područje vrijednosti** kontinuirane slučajne varijable je interval na brojevnom pravcu (moguće i čitav brojevni pravac)
- vjerojatnost pridružujemo intervalima brojevnog pravca
- pojedinačnim vrijednostima x_i pripada vjerojatnost 0
- nekom intervalu (x_1, x_2) pridružujemo vjerojatnost $P\{x_1<x<x_2\}$ po **funkciji vjerojatnosti f(x)**

(definicija)

Funkcija vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable X je funkcija f(x) koja ima slijedeća svojstva:

1. $f(x) \geq 0, \forall x$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3. $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P\{x_1 < x < x_2\}$

pri čemu su x_1, x_2 bilo koje dvije vrijednosti varijable x takve da je $x_1 < x_2$

značenje svojstava funkcije vjerojatnosti:

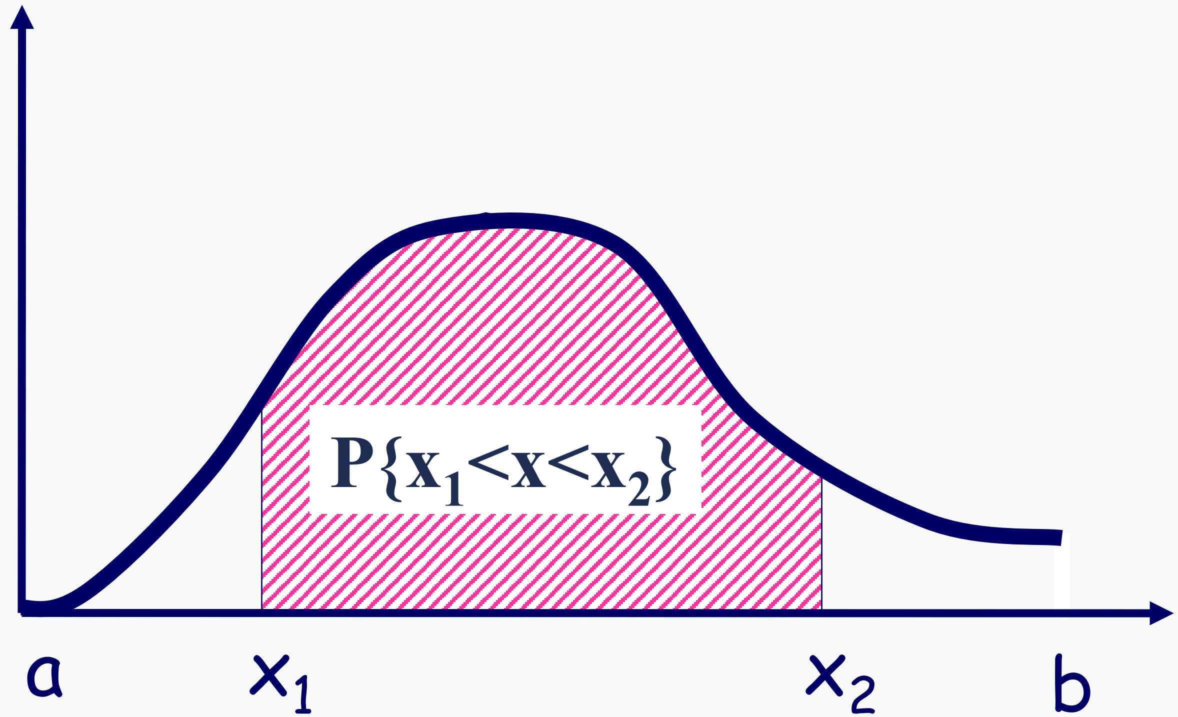
- **1. svojstvo** – NENEGATIVNOST (vjerojatnost ne može biti negativan broj)

- **2. svojstvo** – VJEROJATNOST SIGURNOG DOGAĐAJA je 1
  - ako je područje vrijednosti slučajne varijable X interval (a,b), onda 2. svojstvo poprima oblik

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = 1}$$

i uzimamo da je **f(x)=0** za sve vrijednosti x izvan područja vrijednosti, tj. intervala (a,b)

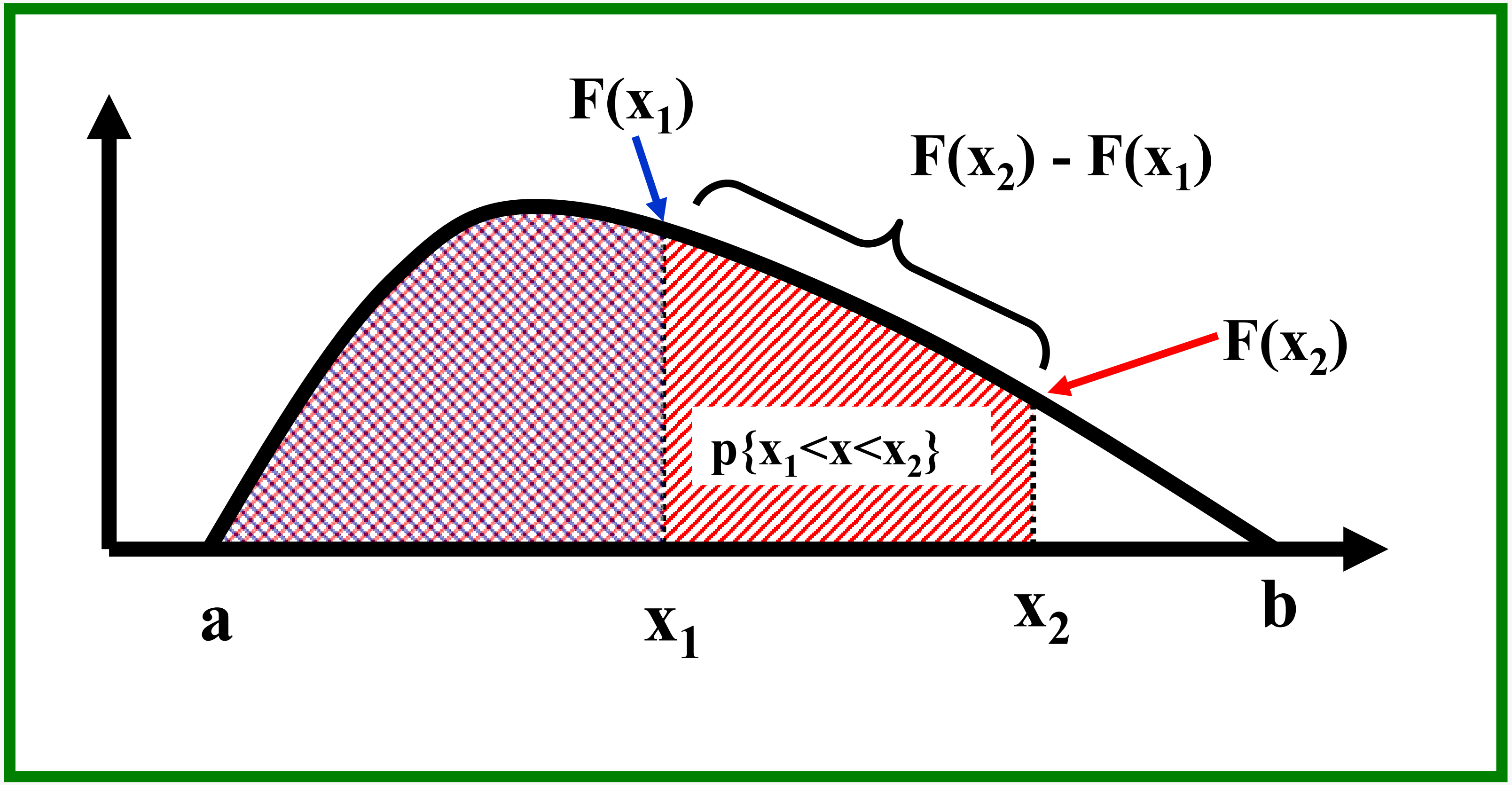
- 3. svojstvo – $P\{x_1<x<x_2\}$ je numerički jednaka površini ispod krivulje vjerojatnosti nad intervalom (x_1, x_2)



FUNKCIJA RASPODJELE kontinuirane slučajne varijable

$$\boxed{\mathbf{F(x_0)} = \int_{-\infty}^{\mathbf{x_0}} f(x)dx = P\{x \leq x_0\}}$$

- pokazuje kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi bilo koju vrijednost manju ili jednaku x_0


F(x1)
F(x2) - F(x1)
F(x2)
p{x1<x<x2}
a
x1
x2
b

KARAKTERISTIČNE VRIJEDNOSTI SLUČAJNIH VARIJABLI

OČEKIVANJE (sredina) SLUČAJNE VARIJABLE

$$\boxed{E(x) = \mu = \sum_i x_i p(x_i)}$$

očekivanje diskretne slučajne varijable

$$\boxed{E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}$$

očekivanje kontinuirane slučajne varijable

- kod empirijske raspodjele frekvencija to je aritmetička sredina:

$$\boxed{\mu = \frac{\sum_i x_{i0}}{N} = \frac{\sum_i f_i x_i}{N} = \sum_i f_{ri} x_i}$$

VARIJANCA (disperzija) SLUČAJNE VARIJABLE

$$V(x) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

varijanca diskretne slučajne varijable

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

varijanca kontinuirane slučajne varijable

- kod empirijske raspodjele frekvencija:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_{i0} - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_i f_i (x_i - \mu)^2}{N} = \sum_i f_{ri} (x_i - \mu)^2$$

TEORIJSKE RASPODJELE

BINOMNA RASPODJELA $X \sim B(n,p)$

- $(p+q)^n$

BERNOULLIJEV DOGAĐAJ

- događaj *A* čija se vjerojatnost nastupanja

  $P(A) = p$

  ne mijenja tijekom pokusa, a **vjerojatnost NE nastupanja** događaja *A* je

  $q = 1 - p$

npr. u pokusu bacanja novčića pri svakom bacanju novčića vjerojatnost pojave "grba" je $p = 0{,}5$

- vjerojatnost da Bernoullijev događaj A u nizu od n pokusa nastupi x puta:

$$\boxed{P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}}$$

BERNOULLIJEVA FORMULA

gdje je $\boxed{\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}}$ BINOMNI KOEFICIJENT

BINOMNA RASPODJELA

- skup svih parova $\{x, P(x)\}$, $x = 0, 1, 2, ..., n$

Primjer rekombinacije gena:

Vjerojatnost pojave gena *A* je p(*A*)=p, a vjerojatnost pojave gena a je p(a)=q. Koje su vjerojatnosti mogućih genotipova?

Mogu nastupiti kombinacije: *AA*, *A*a, a*A*, aa.
*A*a i a*A* se ne mogu biološki razlikovati =>
prostor ishoda je {*AA*,*A*a,aa}

$$P(AA) = \binom{2}{2} p^2 q^{2-2} = p^2$$

$$P(Aa) = \binom{2}{1} p^1 q^{2-1} = 2pq$$

$$P(aa) = \binom{2}{0} p^0 q^{2-0} = q^2$$

KARAKTERISTIKE BINOMNE RASPODJELE

- jednoznačno je određena parametrima **n**, **p**

$$\boxed{E(x) = np}$$

OČEKIVANJE

$$\boxed{\sigma^2 = V(x) = npq}$$

VARIJANCA

KARAKTERISTIKE BINOMNE RASPODJELE

KOEFICIJENT ASIMETRIJE

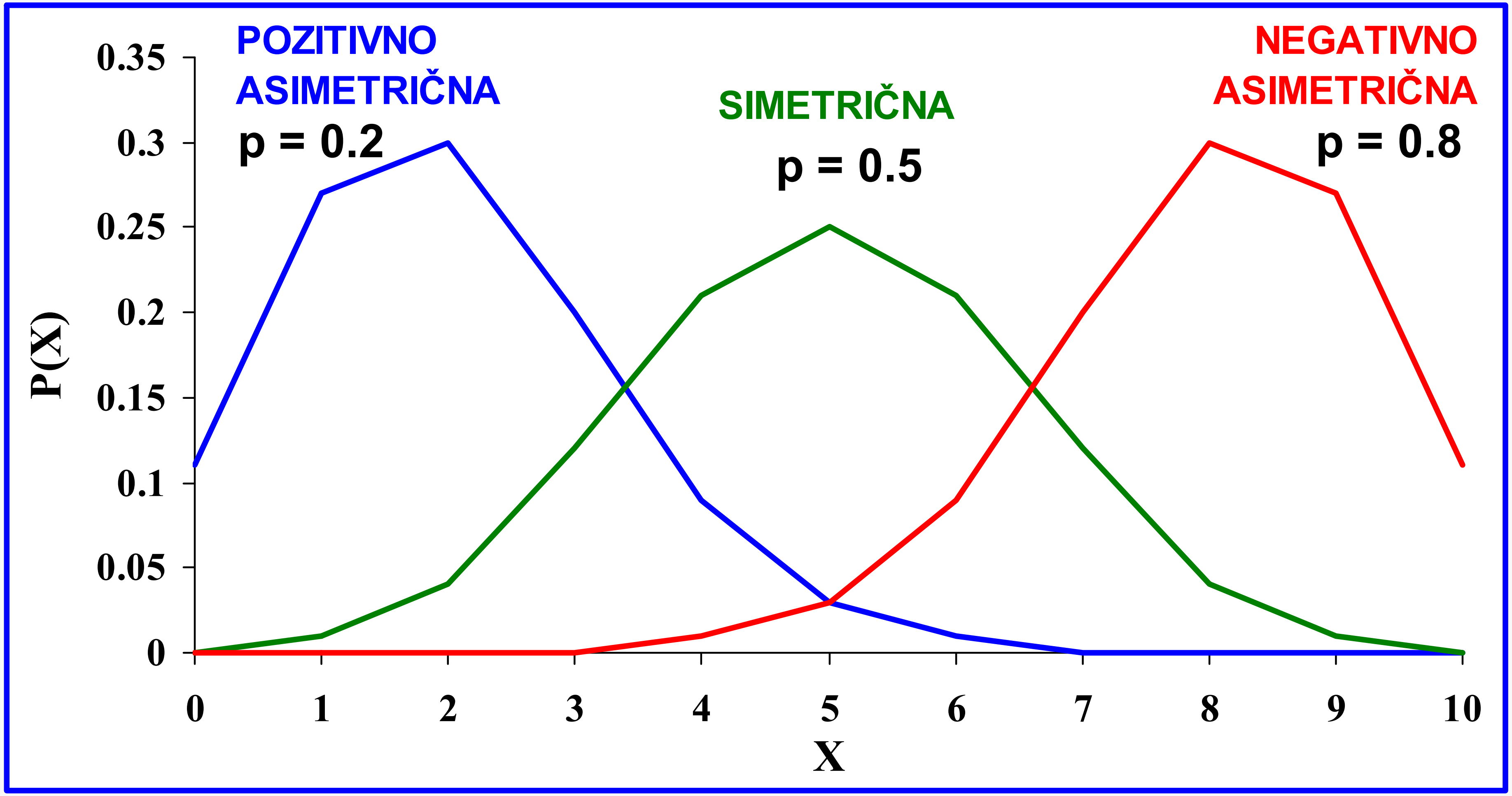
$$\boxed{\alpha_3 = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}}$$

KOEFICIJENT SPLJOŠTENOSTI

$$\boxed{\alpha_4 = 3 + \frac{1 - 6pq}{npq}}$$

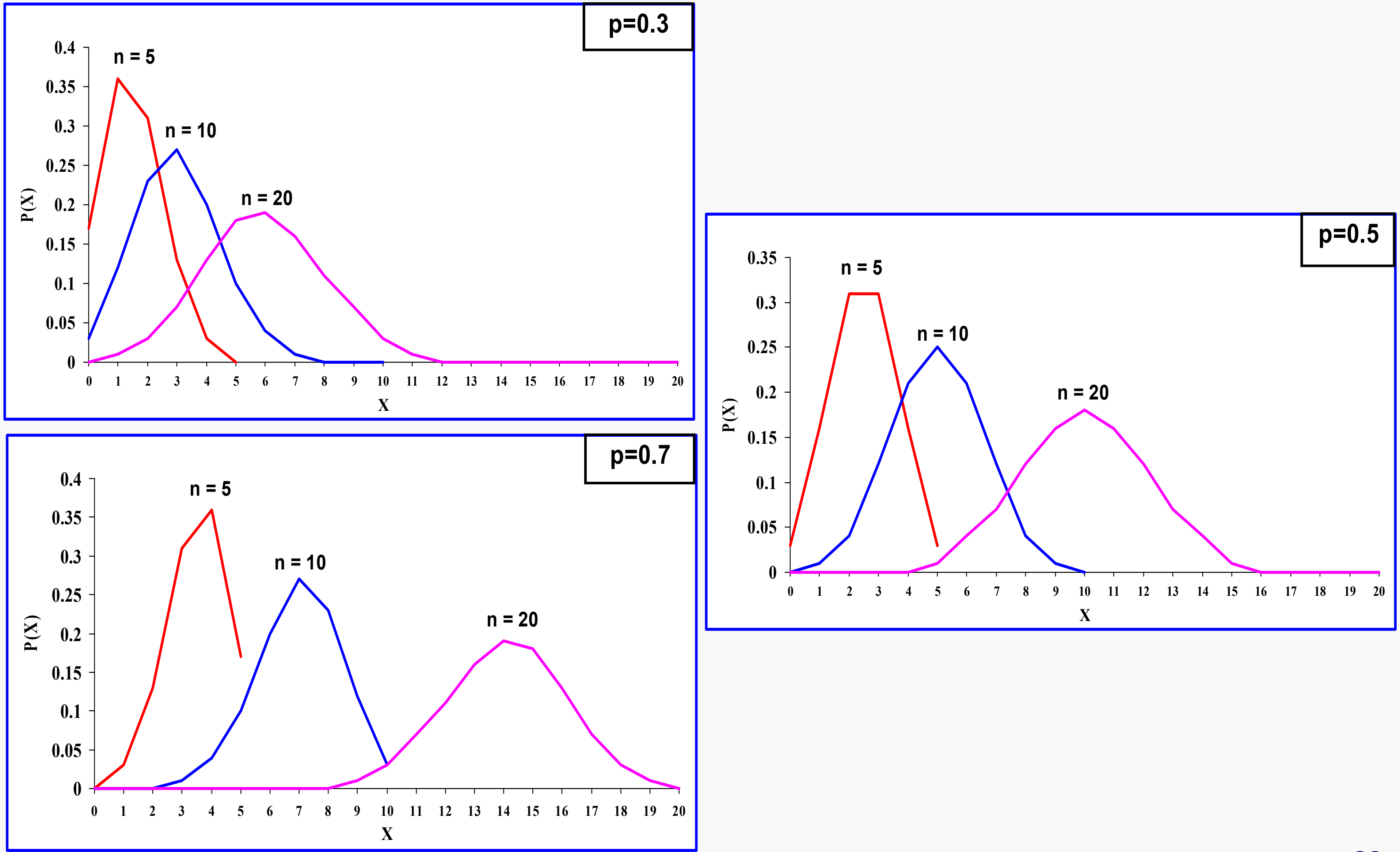
- SIMETRIČNA za $p = q = 1/2$
- POZITIVNO ASIMETRIČNA ako je $q>p$, tj. $q > 1/2$
- NEGATIVNO ASIMETRIČNA ako je $q<p$, tj. $q < 1/2$

BINOMNA RASPODJELA ZA RAZLIČITE PARAMETRE p



- bez obzira na međusobni odnos parametara p i q, vrijedi:

$\alpha_3 \to 0$ kada $n \to \infty$; $\alpha_4 \to 3$ kada $n \to \infty$



PRIMJENA BINOMNE RASPODJELE ZA PROCJENU VJEROJATNOSTI SMRTNOG ISHODA

Ako je letalitet od neke bolesti p=0,30 a vjerojatnost preživljavanja q=0,70 pitanje vjerojatnosti smrtnog ishoda i preživljavanja za 5 bolesnika možemo prikazati kao binomnu raspodjelu (n=5; p=0,30)

PRIMJENA BINOMNE RASPODJELE ZA PROCJENU VJEROJATNOSTI SMRTNOG ISHODA

BROJ UMRLIH	VJEROJATNOST	
0	$P(0)=\binom{5}{0}p^0q^5=q^5$	=0.16807
1	$P(1)=\binom{5}{1}p^1q^4=5pq^4$	=0.36015
2	$P(2)=\binom{5}{2}p^2q^3=10p^2q^3$	=0.30870
3	$P(3)=\binom{5}{3}p^3q^2=10p^3q^2$	=0.13230
4	$P(4)=\binom{5}{4}p^4q^1=5p^4q$	=0.02835
5	$P(5)=\binom{5}{5}p^5q^0=p^5$	= 0.00243

PRILAGOĐAVANJE BINOMNE RASPODJELE EMPIRIJSKIM PODATCIMA

Pokus: 1000 bacanja 7 novčića. Kolike su očekivane frekvencije pojavljivanja grba uz pretpostavku da su novčići ispravni?

Znamo:

- novčići su ispravni => $p = 0.5, \; q = 0.5$
- u svakom je bacanju 7 novčića => $n = 7$
- vjerojatnost pojave X grbova dana je sa

$$P(x) = \binom{7}{x} p^x q^{7-x} = \binom{7}{x} 0.5^x 0.5^{7-x} = \binom{7}{x} 0.5^7$$

x	P(x)	P(x)*N	f_{ex}
0	$\binom{7}{0}0.5^7 = 0.5^7$	7.81	8
1	$\binom{7}{1}0.5^7 = 7 \cdot 0.5^7$	54.69	55
2	$\binom{7}{2}0.5^7 = 21 \cdot 0.5^7$	164.06	164
3	$\binom{7}{3}0.5^7 = 35 \cdot 0.5^7$	273.44	273
4	$\binom{7}{4}0.5^7 = 35 \cdot 0.5^7$	273.44	273
5	$\binom{7}{5}0.5^7 = 21 \cdot 0.5^7$	164.06	164
6	$\binom{7}{6}0.5^7 = 7 \cdot 0.5^7$	54.69	55
7	$\binom{7}{7}0.5^7 = 0.5^7$	7.81	8

POISSONOVA RASPODJELA

- granični prijelaz binomne raspodjele kada

  $\mathbf{n} \to \infty$ uz uvjet $\mathbf{n \cdot p = const.}$

$$\boxed{P(x) = \frac{\mu^{x} e^{-\mu}}{x!}, \quad P(0) = e^{-\mu}}$$

funkcija vjerojatnosti Poissonove raspodjele

gdje je $\mu = n \cdot p$;   e .... baza prirodnog logaritma

($e \approx 2.72$)

KARAKTERISTIKE POISSONOVE RASPODJELE

- jednoznačno je određena parametrom μ

$$\boxed{E(x)=\mu}$$

OČEKIVANJE

$$\boxed{\sigma^2=V(x)=\mu}$$

VARIJANCA

KARAKTERISTIKE POISSONOVE RASPODJELE

KOEFICIJENT ASIMETRIJE

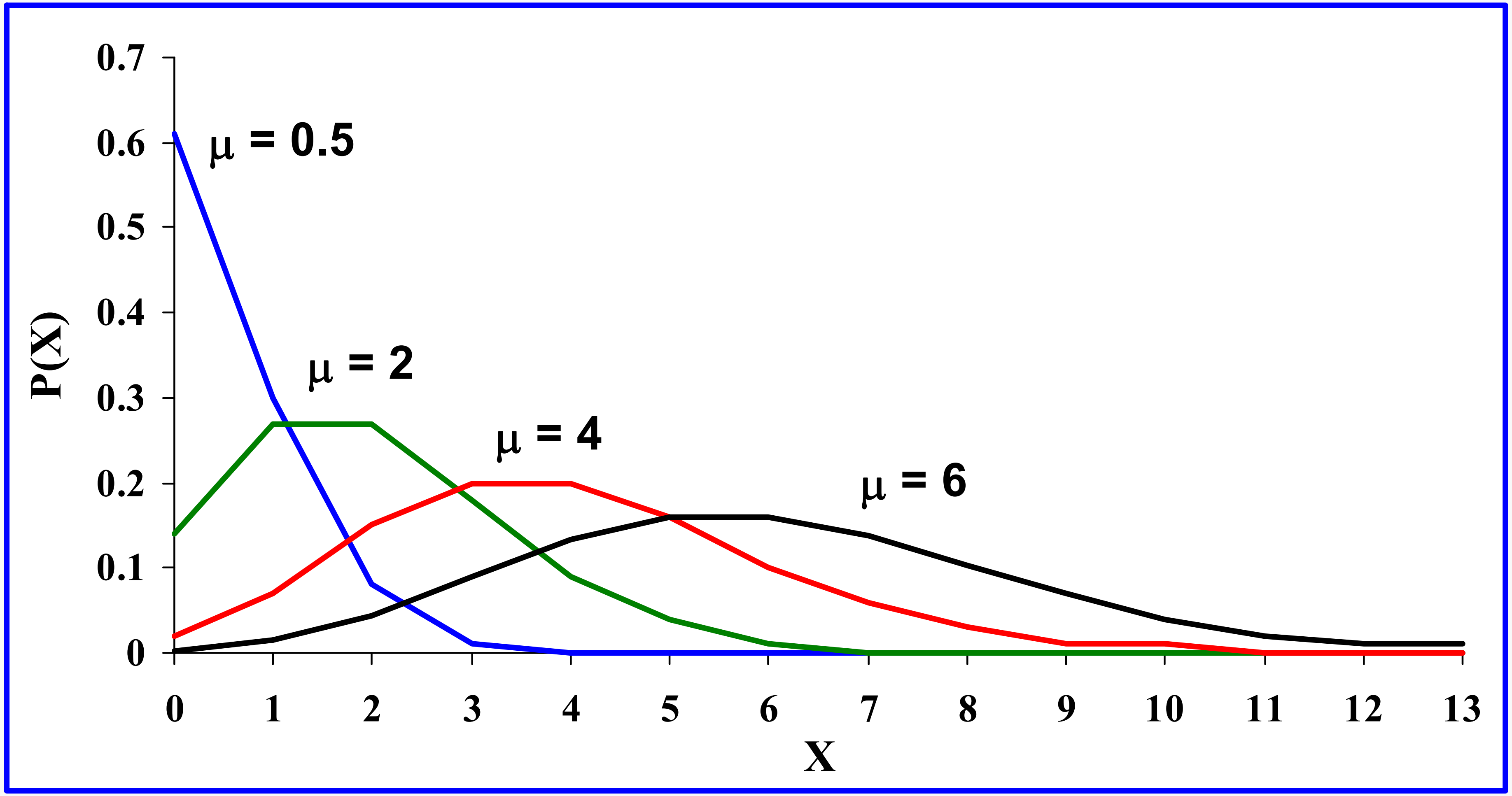
$$\boxed{\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu}}}$$

KOEFICIJENT SPLJOŠTENOSTI

$$\boxed{\alpha_4 = 3 + \frac{1}{\mu}}$$

- $\alpha_3 > 0, \forall\mu$ (pozitivna asimetrija)
- povećanjem parametra μ asimetrija se smanjuje

POISSONOVA RASPODJELA ZA RAZLIČITE PARAMETRE μ



POISSONOVA RASPODJELA

- opisuje slučajnu raspodjelu događaja u vremenu ili sitnih čestica u prostoru
- raspodjela "rijetkih događaja"

PRIMJER: U promatranjima Rutherforda i Geigera ustanovljeno je da jedan radioaktivan izvor emitira u prosjeku 3.87 α čestica u vremenskom intervalu od 7.5 sekundi. Kolika je vjerojatnost da je u jednoj sekundi emitirana:

a) najviše 1 čestica?

b) najmanje 1 čestica?

$$P(x) = \frac{\mu^{x} e^{-\mu}}{x!}, \quad P(0) = e^{-\mu} \qquad \mu = \frac{3.87}{7.5} = 0.516$$

a) $P(x \leq 1) = P(0) + P(1)$

$$P(0) = e^{-\mu} = e^{-0.516} = 0.5969$$

$$P(1) = \frac{0.516^{1} e^{-0.516}}{1!} = 0.516 \cdot 0.5969 = 0.3080$$

$$P(x \leq 1) = P(0) + P(1) = 0.5969 + 0.3080 = 0.9049$$

b) $P(x \geq 1) = 1 - P(x<1) = 1 - P(0) = 1 - 0.5969 = 0.4031$

Aproksimacija binomne razdiobe Poissonovom

- u slučajevima kad je $n \cdot p \leq 10$ uz $n > 50$

PRIMJER: U seriji automatski očitanih nalaza KKS prosječno je 1% pogrešnih.

a) Kolika je vjerojatnost da od 200 nalaza ne bude niti jedan pogrešan?
b) Kolika je vjerojatnost da će u 300 nalaza biti najviše 1 pogrešan?

a) $p=0.01$
$n=200$
$\mu=n \cdot p=2$

$$P(0)=e^{-\mu}=e^{-2}=0.1353$$

b) $p=0.01$
$n=300$
$\mu=n \cdot p=3$

$$P(x)=\frac{\mu^{x} e^{-\mu}}{x!} \qquad P=P(x \leq 1)=P(0)+P(1)$$

$$P(0)=e^{-\mu}=e^{-3}=0.0498$$

$$P(1)=\frac{3^{1} e^{-3}}{1!}=3 \cdot e^{-3}=3 \cdot 0.0498=0.1494$$

$$P=P(x \leq 1)=P(0)+P(1)=0.0498+0.1494=0.1992$$

PRILAGOĐAVANJE POISSONOVE RASPODJELE EMPIRIJSKIM PODATCIMA

Na 576 ploča hranjivih podloga prebrojane su bakterije i dobiveno je sljedeće:

– na 229 pločica nije nađena niti jedna bakterija
– na 211 pločica nađena je 1 bakterija
– na 93 pločice nađene su 2 bakterije
– na 35 pločica nađene su 3 bakterije
– na 7 pločica nađene su 4 bakterije
– na jednoj pločici nađeno je 7 bakterija.

Odgovara li rast bakterija Poissonovoj raspodjeli?

vrijedi: $$\frac{p(x)}{p(x-1)} = \frac{\mu}{x} \Rightarrow p(x) = \frac{\mu}{x} p(x-1)$$

x	f_x	$x \cdot f_x$	μ/x	$p(x)$	$f_{ex}=N \cdot p(x)$	f_{ex}
0	229	0	-	0.39365	226.74	227
1	211	211	0.9323	0.36700	211.39	211
2	93	186	0.4662	0.17108	98.54	99
3	35	105	0.3108	0.05317	30.63	31
4	7	28	0.2331	0.01239	7.14	7
5	0	0	0.1865	0.00231	1.33	1
6	0	0	0.1554	0.00036	0.21	0
7	1	7	0.1332	0.00005	0.03	0
	576	537				576

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i x_i f_{xi} = \frac{537}{576} = 0.9323;$$

$$P(0) = e^{-\mu} = e^{-0.9323} = 0.3936$$

NORMALNA RASPODJELA X~N(μ,σ^2)

- slučajna varijabla X ima normalnu raspodjelu ako je područje njenih vrijednosti <-∞,+∞>, a funkcija vjerojatnosti

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}}$$

FUNKCIJA VJEROJATNOSTI NORMALNE RASPODJELE

NORMALNA RASPODJELA $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .... svojstva ....

OČEKIVANJE $\boxed{E(X) = \mu = a}$

VARIJANCA $\boxed{V(X) = \sigma^2 = b^2}$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

FUNKCIJA VJEROJATNOST I NORMALNE RASPODJELE

- **jednoznačno je određena parametrima**

  μ, σ^2

koeficijent asimetrije

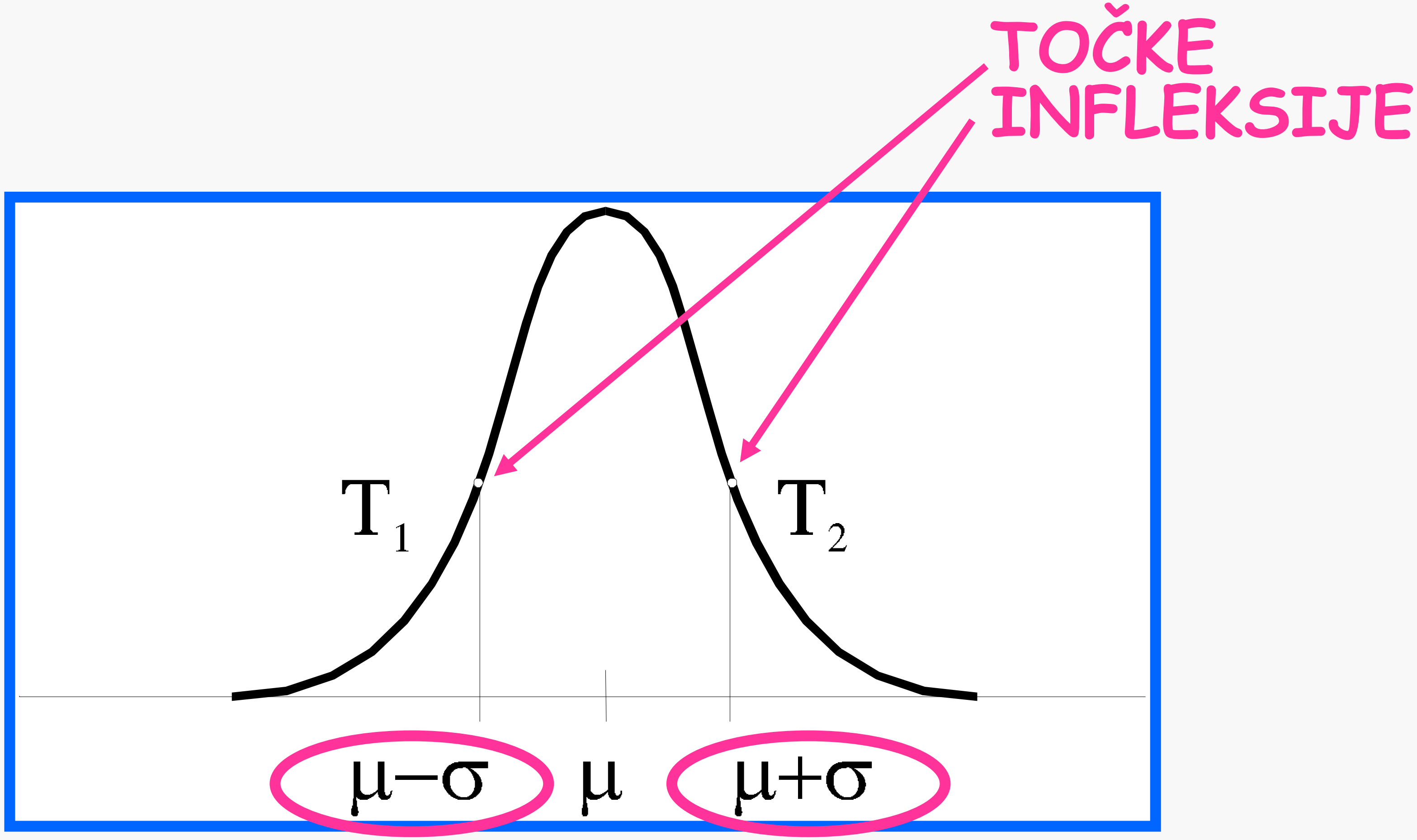
$$\boxed{\alpha_3 = 0}$$

- simetrična s obzirom na pravac $x = \mu$

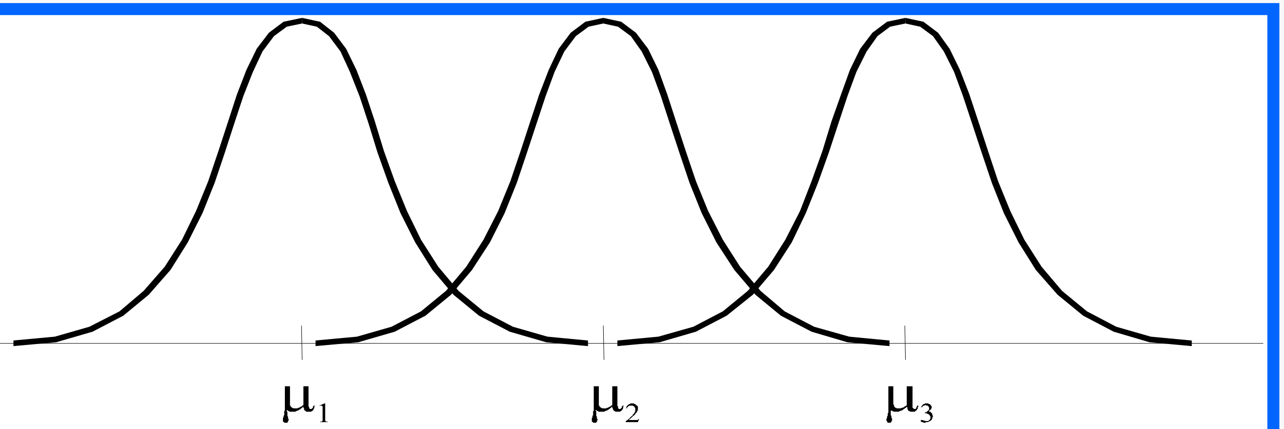
koeficijent spljoštenosti

$$\boxed{\alpha_4 = 3}$$

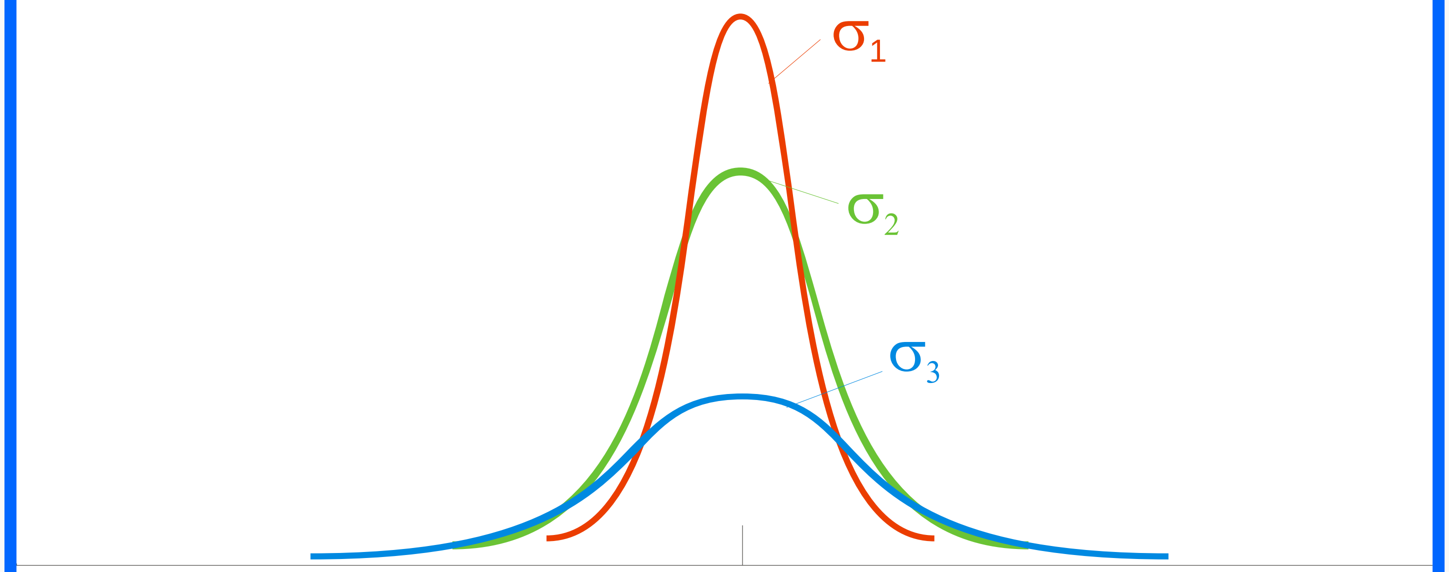
NORMALNA RASPODJELA $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .... svojstva ......



NORMALNA RASPODJELA X~N(μ,σ^2) .... svojstva ...



$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, σ = const.

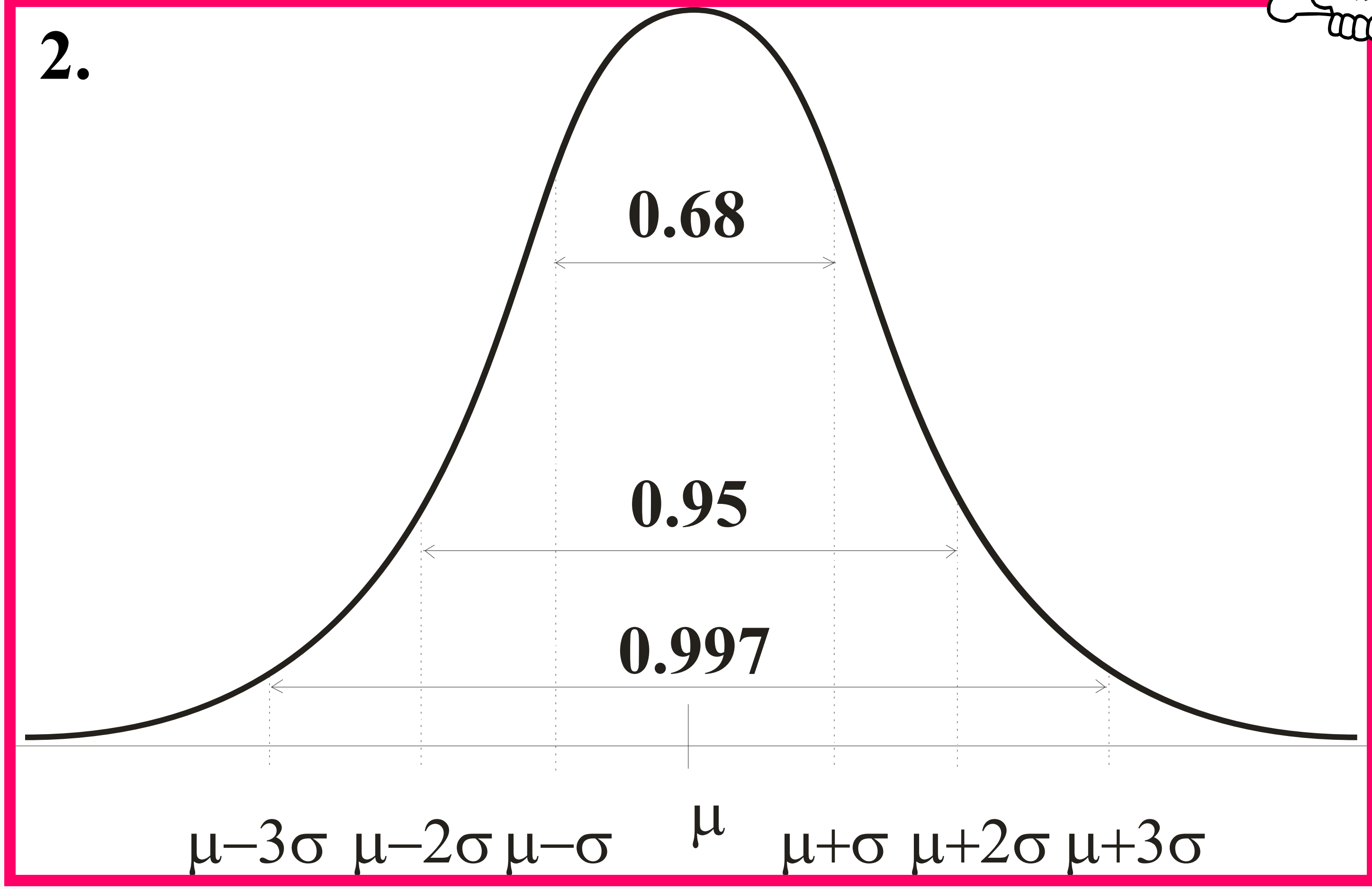


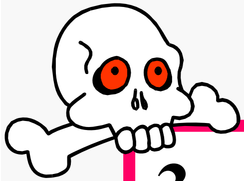
$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, μ = const.

NORMALNA RASPODJELA $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ... svojstva ....

1. $\mu = Me = Mo$

2.





3. **Površina ispod krivulje normalne raspodjele u intervalu između dvije vrijednosti koje su definirane udaljenošću od aritmetičke sredine izražene u standardnim devijacijama je KONSTANTNA** bez obzira na stvarne vrijednosti aritmetičke sredine i standardne devijacije u pojedinom slučaju

Npr:

a)

$x_1 = 2.5$

$x_2 = 3.5$

$\mu = 3$

$\sigma = 0.5$

$P(x_1 < x < x_2) = ?$

$x_1 = 2.5 = \mu - \sigma$

$x_2 = 3.5 = \mu + \sigma$

$\mathbf{P(x_1 < x < x_2)} = P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = \mathbf{0.68}$

b)

$x_1 = 10$

$x_2 = 14$

$\mu = 12$

$\sigma = 2$

$P(x_1 < x < x_2) = ?$

$x_1 = 10 = \mu - \sigma$

$x_2 = 14 = \mu + \sigma$

$\mathbf{P(x_1 < x < x_2)} = P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = \mathbf{0.68}$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z_{a1} = \frac{x_{a1} - \mu_a}{\sigma_a} = \frac{2.5 - 3}{0.5} = -1$$

$$z_{a2} = \frac{x_{a2} - \mu_a}{\sigma_a} = \frac{3.5 - 3}{0.5} = 1$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z_{b1} = \frac{x_{b1} - \mu_b}{\sigma_b} = \frac{10 - 12}{2} = -1$$

$$z_{b2} = \frac{x_{b2} - \mu_b}{\sigma_b} = \frac{14 - 12}{2} = 1$$

$$\boxed{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$

STANDARDIZIRANA VRIJEDNOST

(standardized deviate, z-value)

- supstitucijom u funkciju vjerojatnosti normalne raspodjele dobivamo:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}}$$

funkcija od z

STANDARDNA (jedinična) NORMALNA RASPODJELA X~N(0, 1)

$$\boxed{\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}}$$

FUNKCIJA VJEROJATNOSTI STANDARDNE NORMALNE RASPODJELE

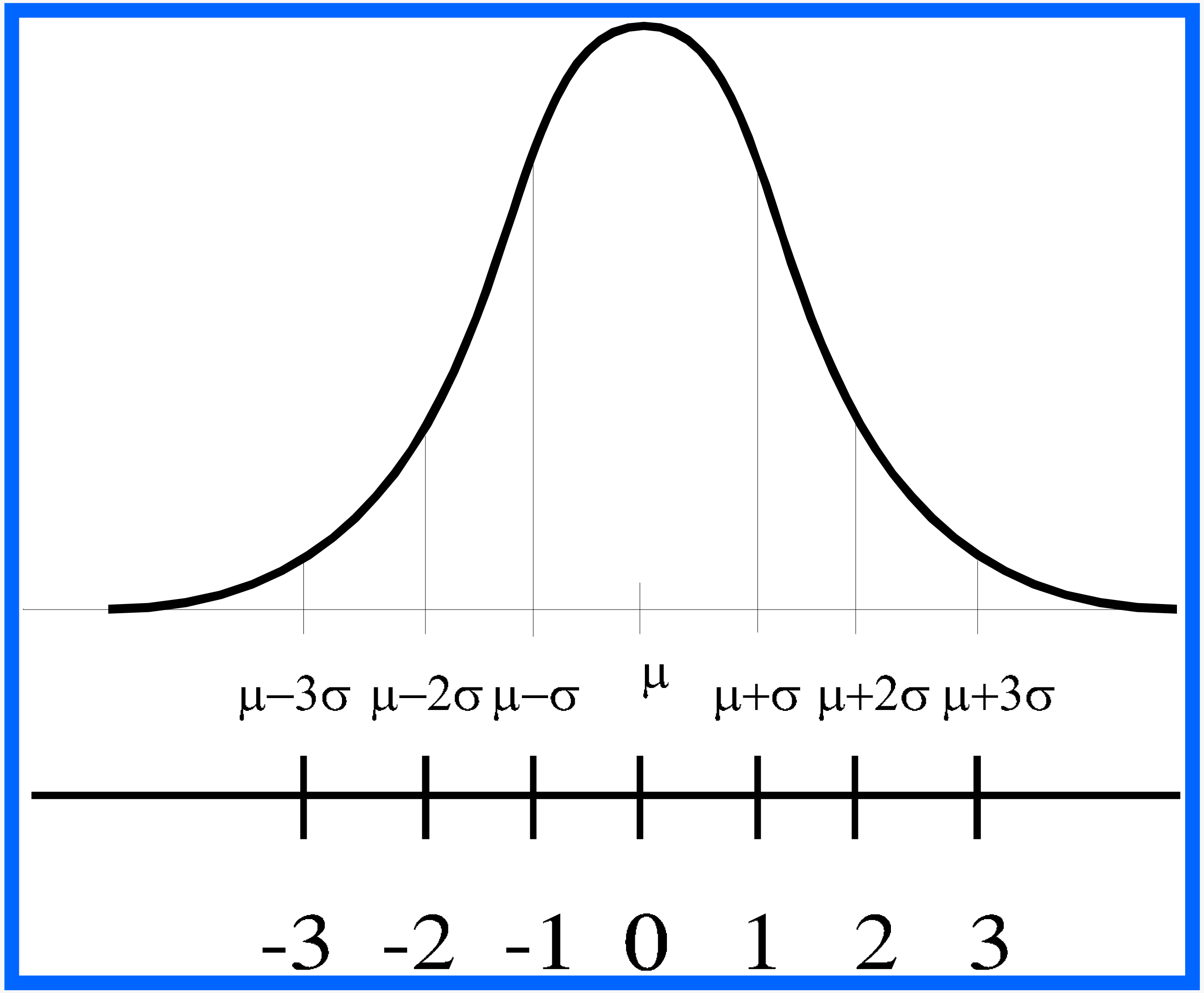
$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(z)$$

OČEKIVANJE $\boxed{E(z) = 0}$

VARIJANCA $\boxed{V(z) = 1}$

X~N(0,1)

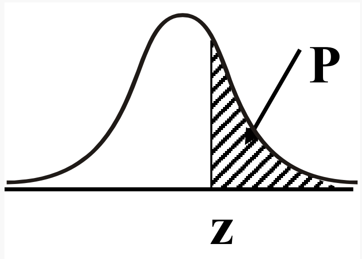
PRETVARANJE LJESTVICE MJERENJA U STANDARDIZIRANU Z-LJESTVICU



ljestvica mjerenja

z - ljestvica

TABLICA POVRŠINA ISPOD STANDARDNE NORMALNE RASPODJELE



- Tablica sadrži vrijednosti površina samo za nenegativne z vrijednosti ($z \geq 0$) i to iznad intervala $<z, +\infty>$.
- Za odgovarajuće negativne z vrijednosti površina je jednaka, tj. $P_{-z} = P(-\infty < x < -z) = P(z < x < +\infty) = P_{+z}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	[illegible]	[illegible]	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	[illegible]	[illegible]	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681

površina ispod krivulje funkcije vjerojatnosti standardne normalne raspodjele iznad intervala <z, +∞>, za z=0.44

Na velikom uzorku izmjerena je visina desetogodišnjih dječaka. Aritmetička sredina visine bila je 137cm, a standardna devijacija 5cm. Kolika je visina od koje je 20% dječaka višlje?

P(z)=0.20

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611

z=0.84

iz $$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad x = \sigma \cdot z + \mu = 5\mathrm{cm} \cdot 0.84 + 137\mathrm{cm} = 141.2\mathrm{cm}$$

Koliki postotak dječaka ima visinu:

a) do 126cm

b) između 126cm i 134cm

c) između 134cm i 144cm

d) iznad 144cm

e) do 144cm?

$$a)\ z_{126} = \frac{126-137}{5} = -2.2 \qquad P(z_{126}) = P_a = 0.0139 \Rightarrow 1.39\%$$

$$b)\ z_{134} = \frac{134-137}{5} = -0.6 \qquad P(z_{134}) = 0.2743$$

$$P_b = P(z_{134}) - P(z_{126}) = 0.2604 \Rightarrow 26.04\%$$

$$c)\ z_{144} = \frac{144-137}{5} = 1.4 \qquad P(z_{144}) = 0.0808$$

$$P_c = 1 - \left[P(z_{134}) + P(z_{144})\right] = 1 - (0.2743 + 0.0808) = 0.6449 \quad \Rightarrow 64.49\%$$

$$d)\ P_d = P(z_{144}) = 0.0808 \quad \Rightarrow 8.08\%$$

$$e)\ P_e = 1 - P_d = 1 - P(z_{144}) = 1 - 0.0808 = 0.9192 \quad \Rightarrow 91.92\%$$