

# VJEROJATNOST

# OSNOVNI POJMOVI TEORIJE VJEROJATNOSTI

- **teorija vjerojatnosti**

- matematička teorija slučajnih događaja

- **SLUČAJNI DOGAĐAJ**

- događaj koji ne mora bezuvjetno nastupiti (pod određenim okolnostima se može, ali i ne mora dogoditi)

# POKUS

- proces dobivanja rezultata opažanja

- bacanje dva novčića
- određivanje krvne grupe 100 bolesnika i opažanje rezultata
- bacanje dvije igraće kocke
- prebrojavanje bolesnika koji uzimaju terapiju snižavanja lipida u krvi

# PROSTOR ISHODA

- skup svih mogućih ishoda nekog pokusa

Prostor ishoda za pokus bacanja dva novčića

(P - pismo, G - glava)

prostor ishoda = { GG, GP, PG, PP }

Prostor ishoda za izvlačenje dvije igraće karte (s obzirom na boju)

prostor ishoda = {  ,  ,  ,   }

# PROSTOR ISHODA

Prostor ishoda za pokus bacanja dvije igraće  
kocke

prostor ishoda= { (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)  
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)  
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)  
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)  
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)  
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) }

# PROSTOR ISHODA

Prostor ishoda za pokus određivanja krvne grupe u 100 bolesnika

Krvna grupa	Broj bolesnika
O	42
A	43
B	11
AB	4
<b>Ukupno</b>	<b>100</b>

**42 x O    43 x A    11 x B                    4 x AB**

prostor ishoda= { $\underbrace{O, O, \dots, O}_{42 \text{ x O}}, \underbrace{A, A, \dots, A}_{43 \text{ x A}}, \underbrace{B, B, \dots, B}_{11 \text{ x B}}, \underbrace{AB, AB, AB, AB}_{4 \text{ x AB}}$ }

# DOGAĐAJ

podskup prostora ishoda, tj. skup ishoda

Pokus: bacanje dva novčića

Događaj: pojava dvije "glave"

(P - pismo, G - glava)

prostor ishoda = { GG, GP, PG, PP }

ishod koji realizira  
događaj



# DOGAĐAJ

Pokus: bacanje dvije igraće kocke

Događaj: pojava barem jedne šestice

prostor ishoda= { (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)  
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)  
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)  
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)  
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)  
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) }

ishodi koji realiziraju događaj



# DOGAĐAJ

Pokus: određivanje krvne grupe u 100 bolesnika

Događaj: krvna grupa je AB

Krvna grupa	Broj bolesnika
O	42
A	43
B	11
AB	<u>4</u>
Ukupno	100

ishodi koji realiziraju događaj

42 x O    43 x A    11 x B                    4 x AB

prostor ishoda= {O,O,..O, A,A,..A,B,B,..,B,AB, AB, AB, AB}

# KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI (vjerojatnost A PRIORI)

## ELEMENTARNI DOGAĐAJ

svaki od  $n$  jednako mogućih ishoda nekog događaja

prostor elementarnih događaja

skup svih elementarnih događaja

$$P(D) = \frac{m(D)}{n}$$

vjerojatnost događaja  $D$

$m(D)$ .... broj povoljnih ishoda (događaja koji realiziraju događaj  $D$ )

$n$ ..... broj svih ishoda (kardinalni broj prostora elementarnih događaja)

# PRIMJER

**pokus:** bacanje dva novčića

**D** ...oba novčića su pala na glavu

prostor ishoda = { GG, GP, PG, PP }

- taj događaj realizira 1 od 4 jednako moguća događaja

$$P(\mathbf{D}) = \frac{1}{4}$$

**pokus:** bacanje dvije igraće kocke

**D...**pojava barem jedne šestice

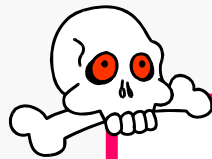
prostor ishoda= { (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) **(1,6)**  
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) **(2,6)**  
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) **(3,6)**  
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) **(4,6)**  
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) **(5,6)**  
**(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)** }

- taj događaj realizira 11 od 36 jednako mogućih događaja

$$P(\mathbf{D}) = \frac{11}{36}$$

# RELATIVNA FREKVENCIJA

- omjer broja povoljnih ishoda i ukupnog broja pokusa ili ispitanika na kojima promatramo događaj



$$f(D) = \frac{m(D)}{n}$$

# RELATIVNA FREKVENCIJA - primjer

Od 674 stanovnika otoka Suska, 312 stanovnika ima krvnu grupu O, 340 grupu A, 17 grupu B a 5 grupu AB. Kolika je vjerojatnost da jedan slučajno odabrani stanovnik ima krvnu grupu O?

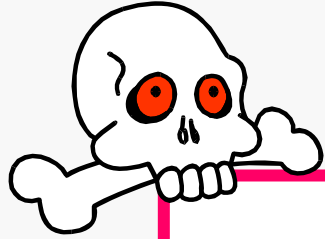
D....krvna grupa je O

broj povoljnih ishoda

$$P(D) = \frac{312}{674} \approx 0.46$$

broj ispitanika

# ZAKON VELIKIH BROJEVA



**KADA BROJ POKUSA RASTE,  
APSOLUTNA RAZLIKA IZMEĐU  
RELATIVNE FREKVENCije I  
VJEROJATNOSTI SE SMANJUJE**

# VJEROJATNOST A POSTERIORI (statistička vjerojatnost)

- granična vrijednost relativne frekvencije kada broj pokusa raste u beskonačnost



$$P(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(D)}{n}$$

vjerojatnost događaja D

$$m(D) \leq n \Rightarrow 0 \leq P(D) \leq 1$$



# SKALA VJEROJATNOSTI



# SUBJEKTIVNA VJEROJATNOST

- vjerojatnost događaju D se dodjeljuje prema subjektivnoj procjeni pojedinca



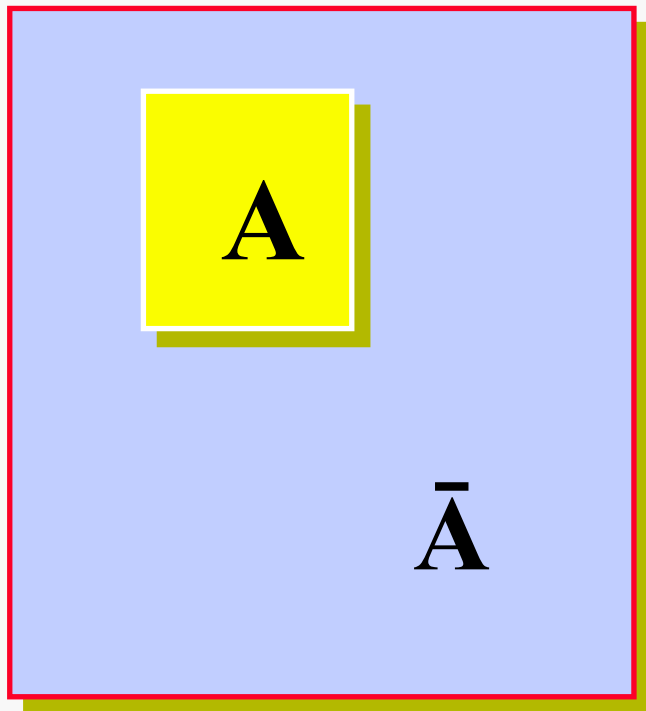
Prijatelj: Odgovor je: D

Ja: Koliko si siguran?

Prijatelj: Više od 77%

# OSNOVNA PRAVILA RAČUNA VJEROJATNOSTI

# PRAVILO KOMPLEMENTIRANJA (suprotna vjerojatnost)



$P(A)$ ... vjerojatnost nastupanja događaja  $A$

$\bar{A}$  ... "non  $A$ " (događaj koji označava ne nastupanje događaja  $A$ )

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

# PRAVILO KOMPLEMENTIRANJA - primjer

Ako je vjerojatnost rođenja muškog djeteta 0.52, kolika je vjerojatnost rođenja ženskog djeteta?

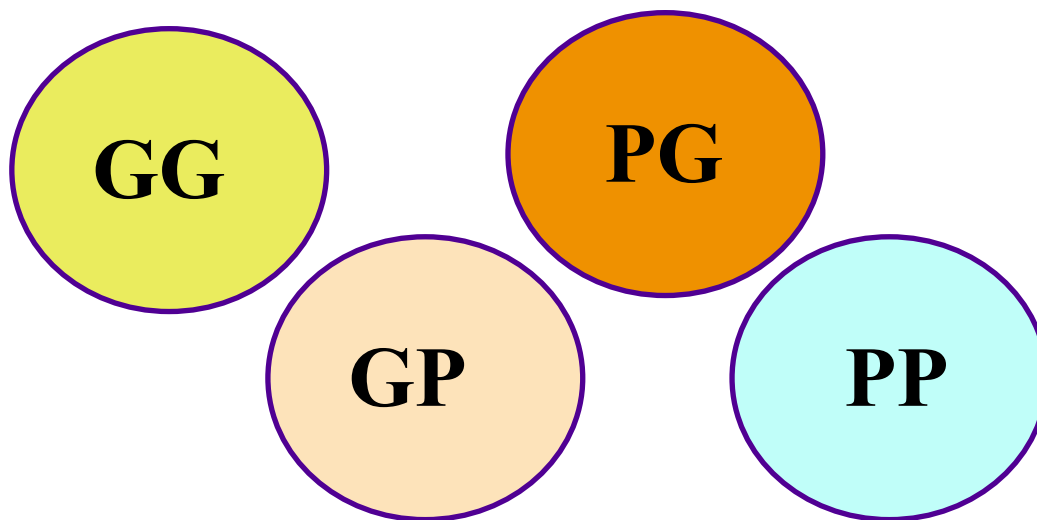
$$P(\text{muško}) = 0.52$$

$$P(\text{žensko}) = 1 - 0.52 = 0.48$$

# DOGAĐAJI KOJI SE MEĐUSOBNO ISKLJUČUJU

- ne mogu nastupiti istovremeno
- disjunktne događaji

U pokusu bacanja dva novčića sva četiri moguća ishoda se međusobno isključuju



# PRAVILO ADICIJE

(za događaje koji se međusobno isključuju)

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  događaji koji se međusobno isključuju

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  složeni događaj, nastaje kada nastupi ili  $A_1$  ili  $A_2$  ili..ili  $A_k$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

# PRAVILO ADICIJE - primjer

U nekoj populaciji vjerojatnosti pojedinih krvnih grupa su:

$$P(O)=0.42, P(A)=0.43, P(B)=0.11 \text{ i } P(AB)=0.04.$$

Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani pripadnik te populacije ima krvnu grupu A ili B?

$$P(A \text{ ili } B) = 0.43 + 0.11 = 0.54$$



# PRAVILO ADICIJE - primjer

Ako je vjerojatnost svijetle kose 0.20, vjerojatnost smeđe kose 0.40 a vjerojatnost crne kose 0.20, kolika je vjerojatnost da kosa bude:

a) smeđa ili crna

b) svijetla ili smeđa ili crna?

a)  $P(\text{smeđa ili crna}) = 0.40 + 0.20 = 0.60$

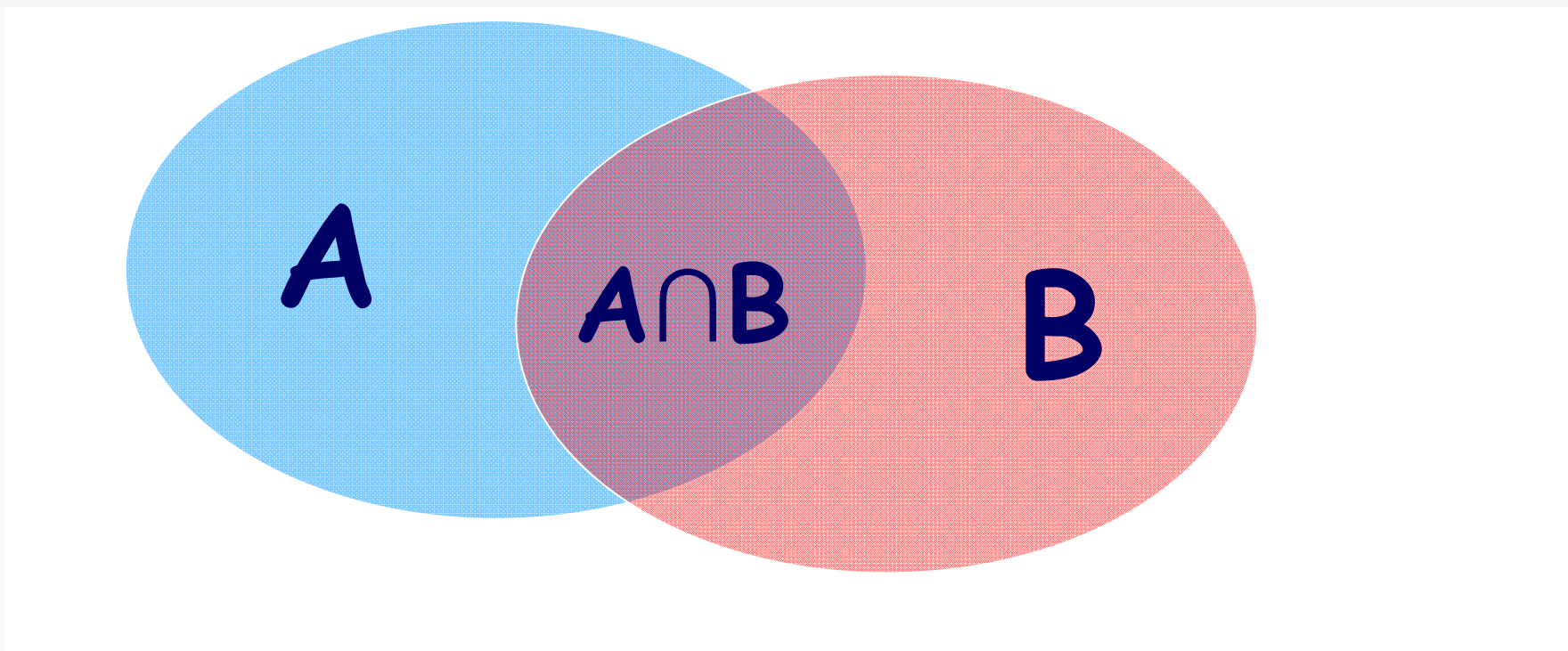
b)  $P(\text{svijetla ili smeđa ili crna}) = 0.20 + 0.40 + 0.20 = 0.80$

# NEZAVISNI DOGAĐAJI

- događaji koji mogu nastupiti istovremeno, pri čemu vjerojatnost nasupanja nekog od njih ne ovisi o realizaciji drugih

# PRAVILO MULTIPLIKACIJE ( za nezavisne događaje)

$A, B$  ..... nezavisni događaji



$A \cap B$  novi događaj koji nastupi kada se istovremeno realiziraju događaji A i B

# PRAVILO MULTIPLIKACIJE ( za nezavisne događaje)

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  ... nezavisni događaji

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k$  događaj koji nastupi kada se istovremeno realiziraju događaji  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_k)$$

# PRAVILO MULTIPLIKACIJE

## - primjer

Ako je vjerojatnost svijetle kose 0.30, a vjerojatnost crnih očiju 0.20, kolika je vjerojatnost istovremenog pojavljivanja svijetle kose i crnih očiju?

$$P(\text{svijetla kosa i crne oči}) = 0.30 * 0.20 = 0.06$$

## primjer

Rezultati studije pokazali su da 60% majki djece do 10 godina radi puno radno vrijeme. Ako slučajno odaberemo tri majke, kolika je vjerojatnost da barem jedna od njih radi puno radno vrijeme?

$$\begin{aligned} P(\text{barem jedna radi PRV}) &= 1 - P(\text{niti jedna ne radi PRV}) = \\ &= 1 - [(0.4)(0.4)(0.4)] = \\ &= 1 - (0.4)^3 = 1 - 0.064 = \\ &= 0.936 \end{aligned}$$

## ...općenito....

vjerojatnost da se u nizu od  $m$  pokusa događaj **A** pojavi BAREM jedan puta dana je sa:

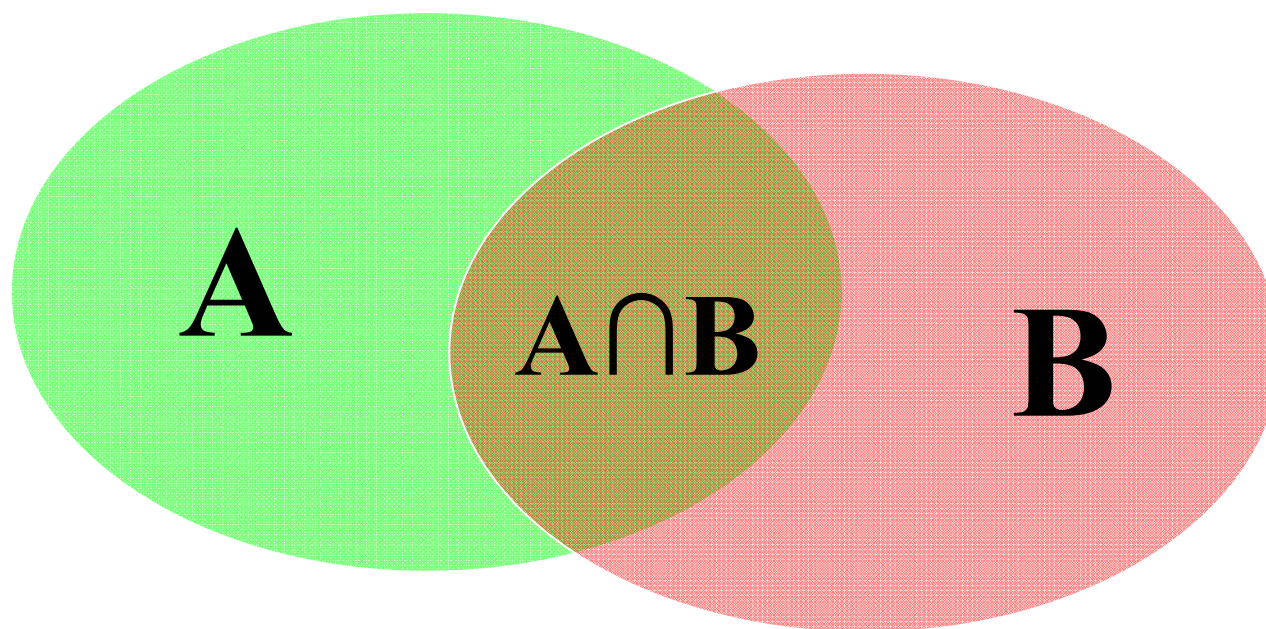
$$P(\text{barem jedan } A) = 1 - q^m$$

$q$ .... vjerojatnost da se **A** NE DOGODI

$$q = 1 - P(A)$$

# OPĆE PRAVILO ADICIJE

$A, B, \dots$  događaji koji mogu istovremeno nastupiti



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



# OPĆE PRAVILO ADICIJE - primjer

Od 150 studenata u domu 40 je imalo CD, 80 TV a 30 i CD i TV. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani student ima ili CD ili TV?

A ...student ima CD       $P(A) = 40/150 = 0.2667$

B ...student ima TV       $P(B) = 80/150 = 0.5333$

AiB ...student ima i CD i TV       $P(A \cap B) = 30/150 = 0.2$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2667 + 0.5333 - 0.2 = 0.6$$

# UVJETNA VJEROJATNOST

- osnovna vjerojatnost u prirodnim i humanističkim istraživanjima
- ishodu nekog događaja prethodi neki drugi događaj kao uvjet za slijedeći potencijalni događaj

letalitet (stopa umrlih od neke bolesti) je tipična uvjetna vjerojatnost - mora biti zadovoljen uvjet da je osoba oboljela od te bolesti

# UVJETNA VJEROJATNOST

A, B...dogadjaji

vjerojatnost događaja B uz uvjet da se događaj A odigrao dana je sa:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

# UVJETNA VJEROJATNOST - primjer

Učestalost sljepoće za boje u ljudskoj populaciji različita je prema spolu (X-kromosomska nasljedna anomalija).

Učestalost (%)			
	muškarci	žene	ukupno
slijepi za boje	4,23	0,65	4,88
normalni	48,48	46,64	95,12
ukupno	52,21	47,29	100,00

# UVJETNA VJEROJATNOST - primjer

Incidencija sljepoće za boje u muškoj subpopulaciji vodi na uvjetnu vjerojatnost

$$P(S | M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)}$$

<b><math>P(S \cap M)</math></b>	muškarci	žene	ukupno
sljepi za boje	<b>0.0423</b>	0.0065	0.0488
normalni	0.4848	0.4664	0.9512
ukupno <b><math>P(M)</math></b>	<b>0.5221</b>	0.4729	1.0000

# OPĆE PRAVILO MULTIPLIKACIJE

neka su  $A$ ,  $B$  događaji koji NISU nezavisni

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$A$ ...preživljavanje kemoterapije ;  $P(A)=0.9$

$B$ ...izlječenje leukemije

$B|A$  ....izlječenje leukemije pod uvjetom preživljavanja kemoterapije;  $P(B|A)= 0.8$

Kolika je vjerojatnost da bolesnik preživi kemoterapiju i bude izliječen od leukemije?

$$P(A \cap B)=P(A)P(B|A)=0.9*0.8=0.72$$

# OPĆE PRAVILO MULTIPLIKACIJE

## primjer

Morbiditet od neke bolesti u populaciji je 0.10, a letalitet od te iste bolesti u istoj populaciji 0.08. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabran član te populacije oboli i umre?

$$P(A) = 0.10$$

$$P(B|A) = 0.08$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.10 * 0.08 = 0.008$$

# NEZAVISNI DOGAĐAJI

dogadjaji A i B su **nezavisni** ako vrijedi:

$$P(A|B) = P(A)$$

ili

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$



# NEZAVISNI DOGAĐAJI

	gluhoća		
	postoji	ne postoji	ukupno
slijepi za boje	0.0004	0.0796	0.0800
normalni	0.0046	0.9154	0.9200
ukupno	0.0050	0.9950	1.0000

$$P(G|S) = 0.0004/0.0800$$

$$= 0.0050$$

$$P(\bar{G}|S) = 0.0796/0.0800$$

$$= 0.9950$$

$P(G)$

$P(\bar{G})$

$$P(S \cap G) = P(S) \cdot P(G|S)$$

$$P(G|S) = P(G)$$

$$P(S \cap G) = P(S) \cdot P(G) \quad \dots \text{dogadjaji su nezavisni}$$