VJEROJATNOST

OSNOVNI POJMOVI TEORIJE VJEROJATNOSTI

- **teorija vjerojatnosti**
  - **matematička teorija slučajnih događaja**

- **SLUČAJNI DOGAĐAJ**
  - **događaj koji ne mora bezuvjetno nastupiti** (pod određenim okolnostima se može, ali i ne mora dogoditi)

POKUS

- **proces dobivanja rezultata opažanja**

- bacanje dva novčića
- određivanje krvne grupe 100 bolesnika i opažanje rezultata
- bacanje dvije igraće kocke
- prebrojavanje bolesnika koji uzimaju terapiju snižavanja lipida u krvi

PROSTOR ISHODA

– skup svih mogućih ishoda nekog pokusa

Prostor ishoda za pokus bacanja dva novčića

(P - pismo, G - glava)

prostor ishoda = { GG, GP, PG, PP}

Prostor ishoda za izvlačenje dvije igraće karte (s obzirom na boju)

prostor ishoda = {■ ■, ■ □, □ ■, □ □}

PROSTOR ISHODA

Prostor ishoda za pokus bacanja dvije igraće kocke

prostor ishoda= { (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) }

PROSTOR ISHODA

Prostor ishoda za pokus određivanja krvne grupe u 100 bolesnika

Krvna grupa	Broj bolesnika
O	42
A	43
B	11
AB	4
Ukupno	100

$$\text{prostor ishoda}= \{\overbrace{O,O,..O}^{\textbf{42 x O}}, \overbrace{A,A,..A}^{\textbf{43 x A}},\overbrace{B,B,..,B}^{\textbf{11 x B}},\overbrace{AB, AB, AB, AB}^{\textbf{4 x AB}}\}$$

DOGAĐAJ

podskup prostora ishoda, tj. skup ishoda

Pokus: bacanje dva novčića
Događaj: pojava dvije "glave"

(P - pismo, G - glava)

prostor ishoda = { **GG**, GP, PG, PP}

ishod koji realizira događaj

DOGAĐAJ

Pokus: bacanje dvije igraće kocke

Događaj: pojava barem jedne šestice

prostor ishoda= { (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) **(1,6)**

(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) **(2,6)**

(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) **(3,6)**

(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) **(4,6)**

(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) **(5,6)**

(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) }

ishodi koji realiziraju događaj

DOGAĐAJ

Pokus: određivanje krvne grupe u 100 bolesnika
Događaj: krvna grupa je AB

Krvna grupa	Broj bolesnika
O	42
A	43
B	11
AB	<u>4</u>
Ukupno	100

ishodi koji realiziraju događaj

prostor ishoda= $\{\underbrace{O,O,..O}_{42 \times O}, \underbrace{A,A,..A}_{43 \times A}, \underbrace{B,B,..,B}_{11 \times B}, \underbrace{\mathbf{AB, AB, AB, AB}}_{4 \times AB}\}$

KLASIČNA DEFINICIJA VJEROJATNOSTI (vjerojatnost A PRIORI)

ELEMENTARNI DOGAĐAJ

svaki od n jednako mogućih **ishoda nekog događaja**

prostor elementarnih događaja

skup svih elementarnih događaja

$$\boxed{P(D) = \frac{m(D)}{n}}$$ **vjerojatnost događaja D**

m(D).... broj povoljnih ishoda (događaja koji realiziraju događaj D)

n.......... broj svih ishoda (kardinalni broj prostora elementarnih događaja)

PRIMJER

pokus: bacanje dva novčića

D ....oba novčića su pala na glavu

prostor ishoda = { **<u>GG</u>**, GP, PG, PP}

- taj događaj realizira 1 od 4 jednako moguća događaja

$$\mathbf{P(D) = \frac{1}{4}}$$

pokus: bacanje dvije igraće kocke

D....pojava barem jedne šestice

prostor ishoda= { (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (**1,6**)

(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (**2,6**)

(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (**3,6**)

(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (**4,6**)

(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (**5,6**)

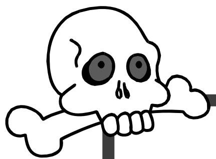
(**6,1**) (**6,2**) (**6,3**) (**6,4**) (**6,5**) (**6,6**) }

- taj događaj realizira 11 od 36 jednako mogućih događaja

$$\mathbf{P(D) = \frac{11}{36}}$$

RELATIVNA FREKVENCIJA

- omjer broja povoljnih ishoda i ukupnog broja pokusa ili ispitanika na kojima promatramo događaj



$$\boxed{f(D) = \frac{m(D)}{n}}$$

RELATIVNA FREKVENCIJA - primjer

Od 674 stanovnika otoka Suska, 312 stanovnika ima krvnu grupu O, 340 grupu A, 17 grupu B a 5 grupu AB. Kolika je vjerojatnost da jedan slučajno odabrani stanovnik ima krvnu grupu O?

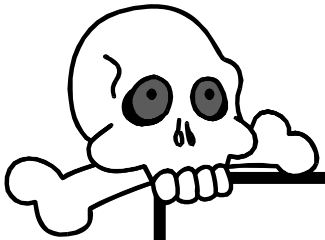
D....krvna grupa je O

broj povoljnih ishoda

$$P(D) = \frac{312}{674} \approx 0.46$$

broj ispitanika

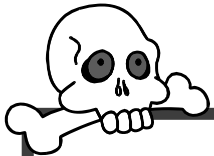
ZAKON VELIKIH BROJEVA



KADA BROJ POKUSA RASTE, APSOLUTNA RAZLIKA IZMEĐU RELATIVNE FREKVENCIJE I VJEROJATNOSTI SE SMANJUJE

VJEROJATNOST A POSTERIORI
(statistička vjerojatnost)

- granična vrijednost relativne frekvencije kada broj pokusa raste u beskonačnost



$$\boxed{P(D)=\lim_{n\to\infty}\frac{m(D)}{n}}$$

vjerojatnost događaja D

$$\mathbf{m(D)\leq n\Rightarrow 0\leq P(D)\leq 1}$$

SKALA VJEROJATNOSTI

SUBJEKTIVNA VJEROJATNOST

- vjerojatnost događaju D se dodjeljuje prema subjektivnoj procjeni pojedinca

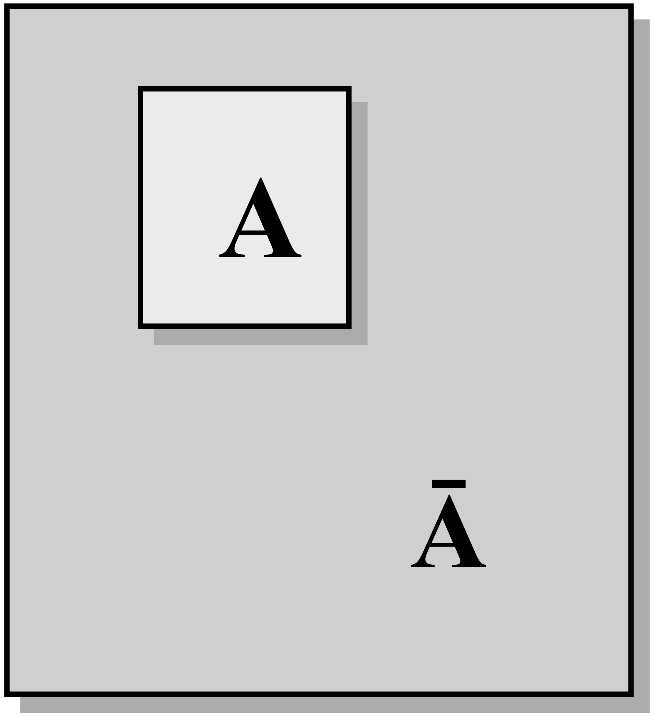
Prijatelj: Odgovor je: D

Ja: Koliko si siguran?

Prijatelj: Više od 77%

OSNOVNA PRAVILA RAČUNA VJEROJATNOSTI

PRAVILO KOMPLEMENTIRANJA (suprotna vjerojatnost)



P(*A*)... vjerojatnost nastupanja događaja *A*

$\bar{A}$ ... "non *A*" (događaj koji označava ne nastupanje događaja *A*)

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

PRAVILO KOMPLEMENTIRANJA - primjer

Ako je vjerojatnost rođenja muškog djeteta 0.52, kolika je vjerojatnost rođenja ženskog djeteta?

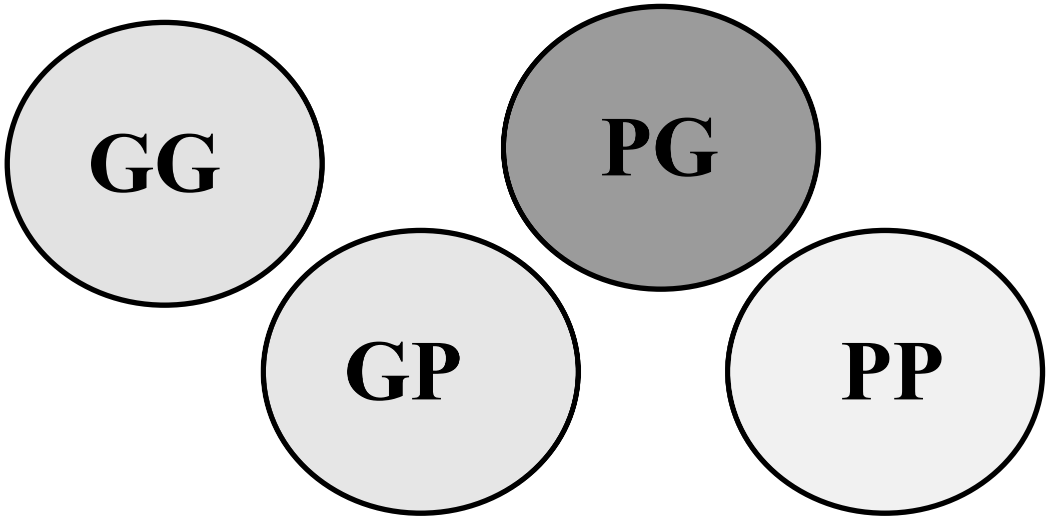
P(muško) = 0.52

P(žensko) = 1 - 0.52 = 0.48

DOGAĐAJI KOJI SE MEĐUSOBNO ISKLJUČUJU

- ne mogu nastupiti istovremeno
- disjunktni događaji

U pokusu bacanja dva novčića sva četiri moguća ishoda se međusobno isključuju



PRAVILO ADICIJE (za događaje koji se međusobno isključuju)

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ događaji koji se međusobno isključuju

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ složeni događaj, nastaje kada nastupi **ili** A_1 **ili** A_2 **ili**..**ili** A_k

$$\boxed{P(A_1 U A_2 U \ldots U A_k) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)}$$

PRAVILO ADICIJE - primjer

U nekoj populaciji vjerojatnosti pojedinih krvnih grupa su:

$P(O)=0.42$, $P(A)=0.43$, $P(B)=0.11$ i $P(AB)=0.04$.

Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani pripadnik te populacije ima krvnu grupu A ili B?

$$\boxed{P(A \text{ ili } B) = 0.43 + 0.11 = 0.54}$$

PRAVILO ADICIJE - primjer

Ako je vjerojatnost svijetle kose 0.20, vjerojatnost smeđe kose 0.40 a vjerojatnost crne kose 020, kolika je vjerojatnost da kosa bude:

a) smeđa ili crna

b) svijetla ili smeđa ili crna?

a) P(smeđa ili crna) = 0.40 + 0.20 = 0.60

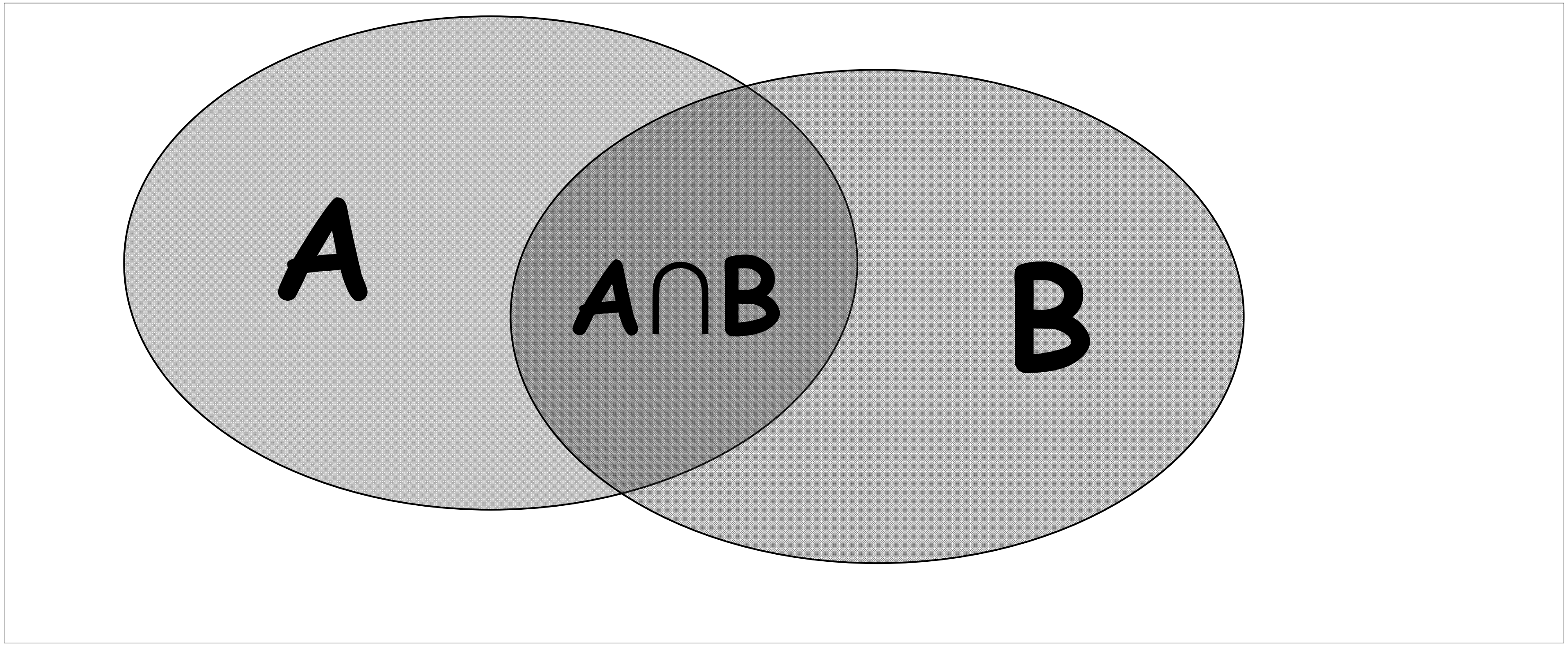
b) P(svijetla ili smeđa ili crna) = 0.20 + 0.40 + 0.20 = 0.80

NEZAVISNI DOGAĐAJI

- događaji koji mogu nastupiti istovremeno, pri čemu vjerojatnost nasupanja nekog od njih ne ovisi o realizaciji drugih

PRAVILO MULTIPLIKACIJE
(za nezavisne događaje)

A , B ...... nezavisni događaji



A ∩ B novi događaj koji nastupi kada se istovremeno realiziraju događaji A i B

PRAVILO MULTIPLIKACIJE
(za nezavisne događaje)

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ ... nezavisni događaji

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k$ događaj koji nastupi kada se istovremeno realiziraju događaji $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_k)$$

PRAVILO MULTIPLIKACIJE - primjer

Ako je vjerojatnost svijetle kose 0.30, a vjerojatnost crnih očiju 0.20, kolika je vjerojatnost istovremenog pojavljivanja svijetle kose i crnih očiju?

P(svijetla kosa i crne oči) = 0.30 * 0.20 = 0.06

primjer

Rezultati studije pokazali su da 60% majki djece do 10 godina radi puno radno vrijeme. Ako slučajno odaberemo tri majke, kolika je vjerojatnost da barem jedna od njih radi puno radno vrijeme?

$$
\begin{aligned}
P(\text{barem jedna radi PRV}) &= 1 - P(\text{niti jedna ne radi PRV}) = \\
&= 1 - [(0.4)(0.4)(0.4)] = \\
&= 1 - (0.4)^3 = 1 - 0.064 = \\
&= 0.936
\end{aligned}
$$

...općenito....

vjerojatnost da se u nizu od **m** pokusa događaj ***A*** pojavi BAREM jedan puta dana je sa:

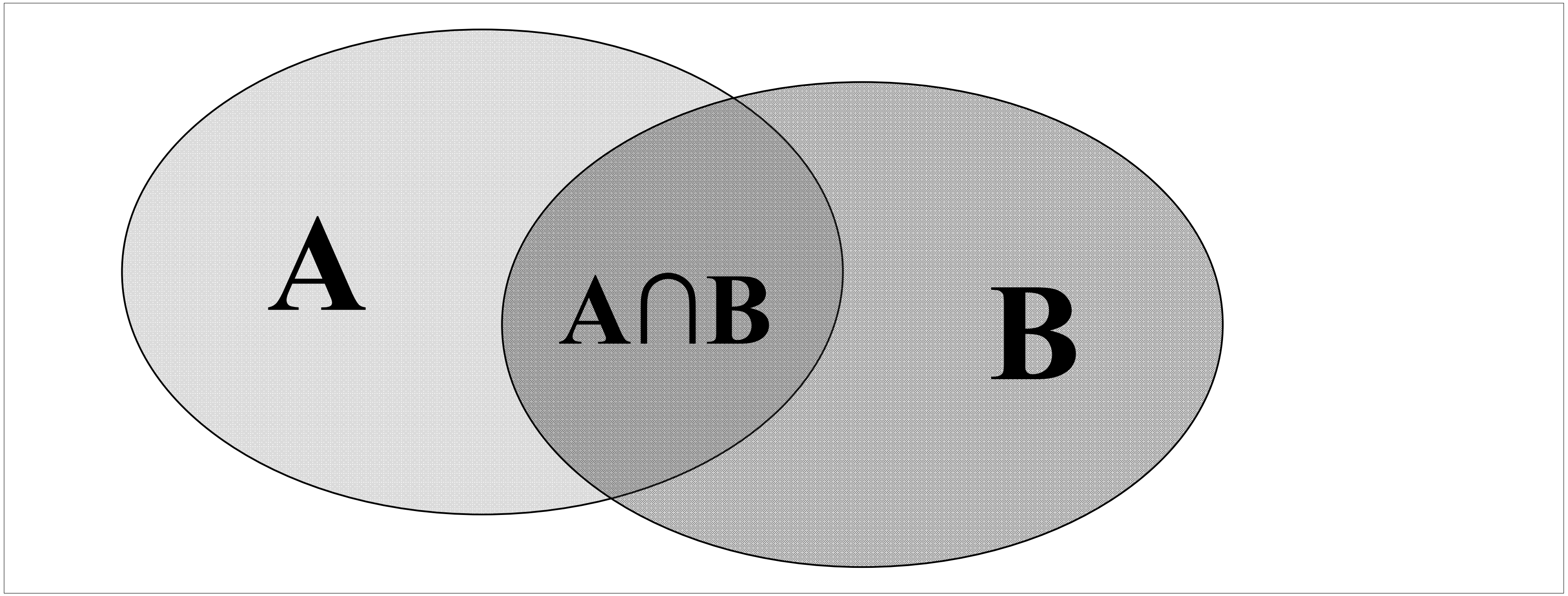
$$\boxed{\mathbf{P}(\text{barem jedan A}) = 1 - q^{\mathbf{m}}}$$

q.... vjerojatnost da se ***A*** NE DOGODI

q = 1 - P(A)

OPĆE PRAVILO ADICIJE

A , B ...... događaji koji mogu istovremeno nastupiti



$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

OPĆE PRAVILO ADICIJE - primjer

Od 150 studenata u domu 40 je imalo CD, 80 TV a 30 i CD i TV. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrani student ima ili CD ili TV?

A ....student ima CD $P(A) = 40/150 = 0.2667$

B ....student ima TV $P(B) = 80/150 = 0.5333$

AiB ...student ima i CD i TV $P(A \cap B) = 30/150 = 0.2$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2667 + 0.5333 - 0.2 =$$
$$= 0.6$$

UVJETNA VJEROJATNOST

- osnovna vjerojatnost u prirodnim i humanističkim istraživanjima
- ishodu nekog događaja prethodi neki drugi događaj kao uvjet za slijedeći potencijalni događaj

letalitet (stopa umrlih od neke bolesti) je tipična uvjetna vjerojatnost - mora biti zadovoljen uvjet da je osoba oboljela od te bolesti

UVJETNA VJEROJATNOST

A, B...događaji

vjerojatnost događaja B uz uvjet da se događaj A odigrao dana je sa:

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

UVJETNA VJEROJATNOST - primjer

Učestalost sljepoće za boje u ljudskoj populaciji različita je prema spolu (X-kromosomska nasljedna anomalija).

Učestalost (%)			
	muškarci	žene	ukupno
slijepi za boje	4,23	0,65	4,88
normalni	48,48	46,64	95,12
ukupno	52,21	47,29	100,00

UVJETNA VJEROJATNOST - primjer

Incidencija sljepoće za boje u muškoj subpopulaciji vodi na uvjetnu vjerojatnost

$$P(S\,|\,M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)}$$

$P(S \cap M)$	muškarci	žene	ukupno
slijepi za boje	0.0423	0.0065	0.0488
normalni	0.4848	0.4664	0.9512
ukupno $P(M)$	0.5221	0.4729	1.0000

OPĆE PRAVILO MULTIPLIKACIJE

neka su A, B događaji koji NISU nezavisni

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

A...preživljavanje kemoterapije ; P(A)=0.9

B...izlječenje leukemije

B|A ....izlječenje leukemije pod uvjetom preživljavanja kemoterapije; P(B|A)= 0.8

Kolika je vjerojatnost da bolesnik preživi kemoterapiju i bude izliječen od leukemije?

$$P(A \cap B)=P(A)P(B|A)=0.9*0.8=0.72$$

OPĆE PRAVILO MULTIPLIKACIJE
primjer

Morbiditet od neke bolesti u populaciji je 0.10, a letalitet od te iste bolesti u istoj populaciji 0.08. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabran član te populacije oboli i umre?

P(A)= 0.10

$$\mathbf{P(B|A) = 0.08}$$

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.10 * 0.08 = 0.008}$$

NEZAVISNI DOGAĐAJI

događaji A i B su nezavisni ako vrijedi:

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$

ili

$$\boxed{P(A \cap B)=P(A)P(B)}$$

NEZAVISNI DOGAĐAJI

	gluhoća		
	postoji	ne postoji	ukupno
slijepi za boje	0.0004	0.0796	0.0800
normalni	0.0046	0.9154	0.9200
ukupno	0.0050	0.9950	1.0000

$P(G|S) = 0.0004/0.0800$

$= 0.0050$

$P(\overline{G}|S) = 0.0796/0.0800$

$= 0.9950$

$P(G)$

$P(\overline{G})$

$$P(S \cap G) = P(S) \bullet P(G|S)$$

$$P(G|S) = P(G)$$

$$P(S \cap G) = P(S) \bullet P(G)$$ ....događaji su nezavisni